自伝風の読み物（仮題）

渕沢弘昌

2025 年の 6 月に大きな病気をし、半年くらい療養をしました。その中で、人生のたな卸しをし、どうも、自分には大きな数学と音楽の才能があったのではないか、とだんだん気づくことがありました。幼少から人よりずっと劣った人間であるという思いが強く、実際に人間的にはその通りですが、能力的には突出した才能があったのではないか。そう思って、高校時代に提出した「自由研究」というレポート（後にだんだん述べますが、中高時代、おもに 4 次元について自分で考えたことをまとめたもの）を高校から取り寄せようとしたり（とっくに存在しないようです）、大学院から修士論文を取り寄せたり（2001 年 1 月提出。出版されていませんが 2004 年に引用されています。これも後にだんだん述べます）しています。それで、先日、もともと Quora で知り合った、当教室のファンであられる方（田中公大さん）を通じて、X（ツイッター）をやっておられる数学者である、東北大の長谷川浩司先生（とても有名な線形代数の教科書をお書きになっている）とお知り合いになり、私の小学校・中学・高校のときのエピソードのいくつかを申し上げましたところ、以下のようにお書きくださいました。

おはようございます。昨日はすぐにはお答えせず失礼しました。

お書き頂いたエピソードから、先生が数学における創造性を早くからお持ちだったのは間違いないかと思います。

ｎ次元錐の体積やねじれの位置など、問いを立てることすらなかなか初学者では辿りつかないものだと思います。問いを立てる能力こそ研究には必要なこと、そのためには数学的自然についての感覚が必要なことなど、先生も御承知かと思いますが、教えられる以前に概ね理解されていたのではないでしょうか。

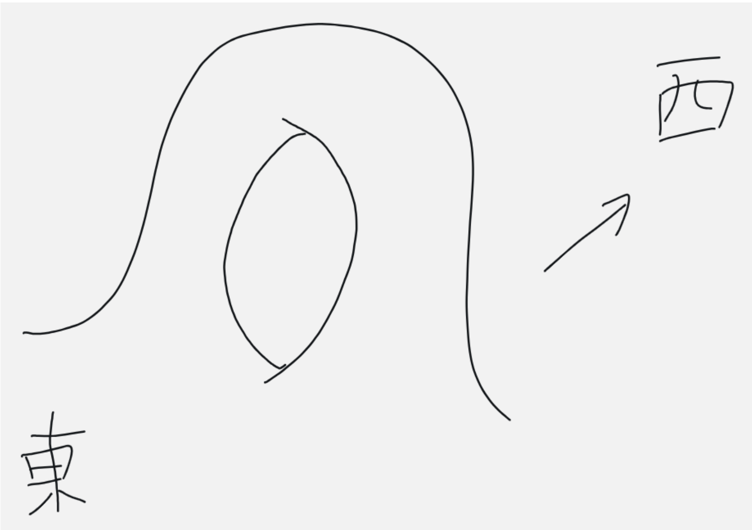
（2025 年 11 月 7 日、X）

ありがたかったです。考えてみますと、私はこういう話を、東大および東大数理にいたとき、誰にも話さなかったと思いますので（皆さん優秀であられてとうていこのような話はできると当時は思えませんでした）、私の幼少時におけるエピソードへの初めての専門の先生の見解だったと思います。それで、続けて長谷川先生は、私の修士論文の 25 年ごしの投稿（私としては「記念投稿」のつもりでした。古い論文ですし）を応援・協力してくださるとおっしゃってくださったうえで、私の幼少のころのこういったエピソードをまとめた「読み物」を書いてみることをすすめてくださいました。それで、毎日、時間はあったため、書いてみることにしたわけです。自分の教室のブログ記事として書き、少しずつ書いて少しずつ発表しました。

第１章　モノドロミー

幼稚園のときの記憶です。どこにも書いたことのない話、人に言ったことのない話を書こうとしています。(誰にも伝えられなかったのです。)

幼稚園は、幼稚園バスで送迎されるある幼稚園で、年中と年長の２年、通いました。ある日、幼稚園の敷地内で、みんなで遊ぶ日がありました。以下のような遊具がありました。



幼児がひとり通り抜けることのできるような「トンネル」のあいた小さな遊具であり、もしかしたら象さんのようなデザインであったかもしれません。トポロジカルには、地球に取っ手がついていて、地球全体をソリッドトーラス（ドーナツの形）と見

なすことが出来、無限遠点があって世界全体が３次元球面であるなら補空間もソリッドトーラスであると見なせる形です（専門家がお読みくださると思って執筆するため、ときどきこのように専門用語を使わせていただきます。なるべく専門用語を使わずに書ける場合はそうします。なお、この時点での私は、地球を３次元球体と認識していないころなので、このような認識ではありません。幼少の私が地球をどのように認識していたかは、章を改めたいと思います)。それで、この遊具は、記憶によれば、トンネルは、東西に通っていたと思います。私はトンネルを東から西向きへ通過しました。そこで、世界が違ってみえるような気がしたのです。それで、もう一度、トンネルを通らずに東側へ戻り、再びトンネルを西向きに通過しました。すると、また世界が違ってみえる気がしたのです。ずっとのち、このような考えはモノドロミーというのであることを知りましたが、この話は正確に述べるのが困難です。何度も私はそのトンネルを東から西へと通過しました。n回通過したとしましょう。教室に戻る時間となりました。遠くで先生が私を呼んでいます。クラスメイトもみんな待っています。しかし、私は元の世界に戻らねばならなかったのです。みんなが待っている中で、私はそのトンネルを、$-n$回、通らねば帰ることができなかったのです。先生は「もう行くよー」とおっしゃっていますが、私は元の世界に戻るべく何度もその遊具を反対向きにぐるぐるとまわっていました。ずっとのちに、解析接続を習ったとき、このときのことを漠然と思い出しました。そののち、基本群なども習ったと思います。世の中

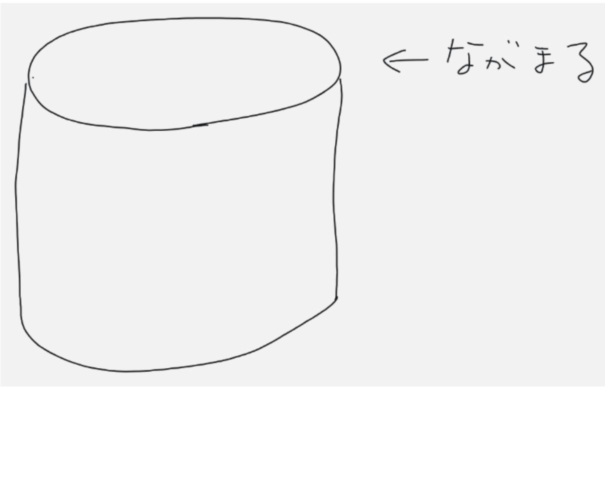
にはこういう考え方をする学問がありました。高校で理系を選び、大学で数学を選び、トポロジーを選んだとき、何度も自分の人生を振り返りつつ、自分の道はこれで間違っていないと思ったものです。25 歳で大病を患うまではそうでした。

本日はこの話だけにいたします。気まぐれな更新となるかもしれませんが、だんだん書いて参りたいと思います。

第２章　開集合、閉集合、位相

こ話は、第１章 の話より前で、幼稚園に上がる前の記憶だと思います。３歳ごろの話ではないかと思います。

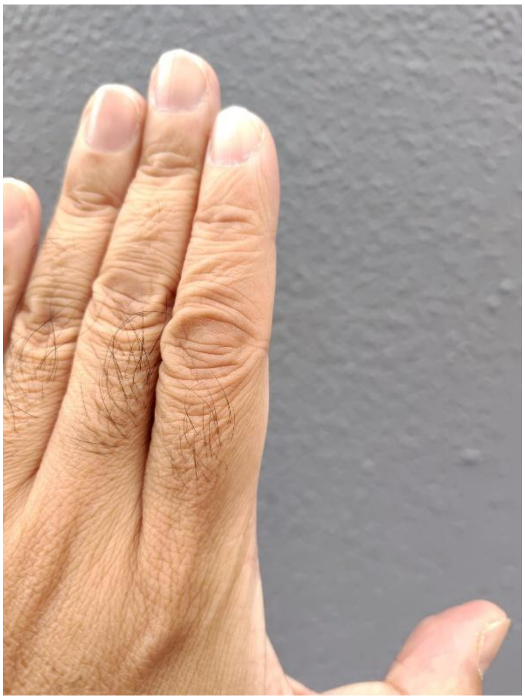
物心のついた私は、紙とえんぴつを持って絵や字をかいていました。身のまわりには、絵のかいてある紙（本など）がたくさんありました。不思議なことがありました。以下のような絵があります。自分でもよくかく絵です。



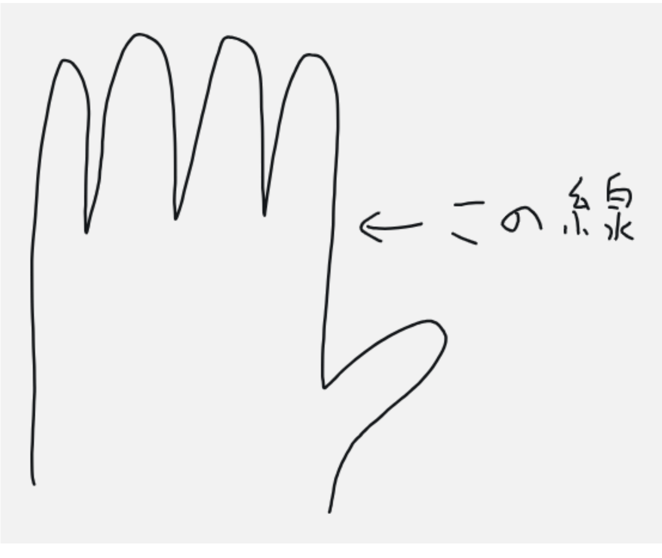
缶詰のような、あるいは、コップのような絵です。円柱のような形ですが、実際にはこれは丸いのです（円）。ところが、この絵のように、紙にかくときは、「ながまる」なのです（楕円）。この現象について、長く考えていました。これは、現実の世界は３次元であり、紙（視界）は２次元であり、３次元のものを２次元に写してかくからなのだと思いますが、３歳くらいの私は、この現象をなんとも言えない気持ちで観察していたことをなんとなく覚えています。

それで、次のことも思いました。さきほどの絵でもそうですが、紙に絵をかくと、輪郭の線が、どうしても、太さを持ってしまうのです。線はどうしても太さを持ちます。えんぴつで書いたらそうなります。では、どうしたら太さのない線を表現できるであろうか。しばらく考えて、以下の考えに至りました。

手を向こうに向けました。どういう状況か、以下にさきほど撮った写真を載せます。当時は３歳の手であり、これは 49 歳の手の写真で、すみません。



手の向こうに、背景が見えます。手の輪郭と、背景の壁の境目。この線は、太さを持たないのではないか。世の中には、このように、太さを持たない線があるではないか。そのように思ったのでした。



（この話もあまり人に言ったことはありません。「線はどうしても太さを持つ」というふうにお思いになる方の話はときどき聞きますが、このように考えた人の話はほとんど聞かない気がします。）

あとからなんとなく漠然と思うことですが、数学で以下のような考えがあります。

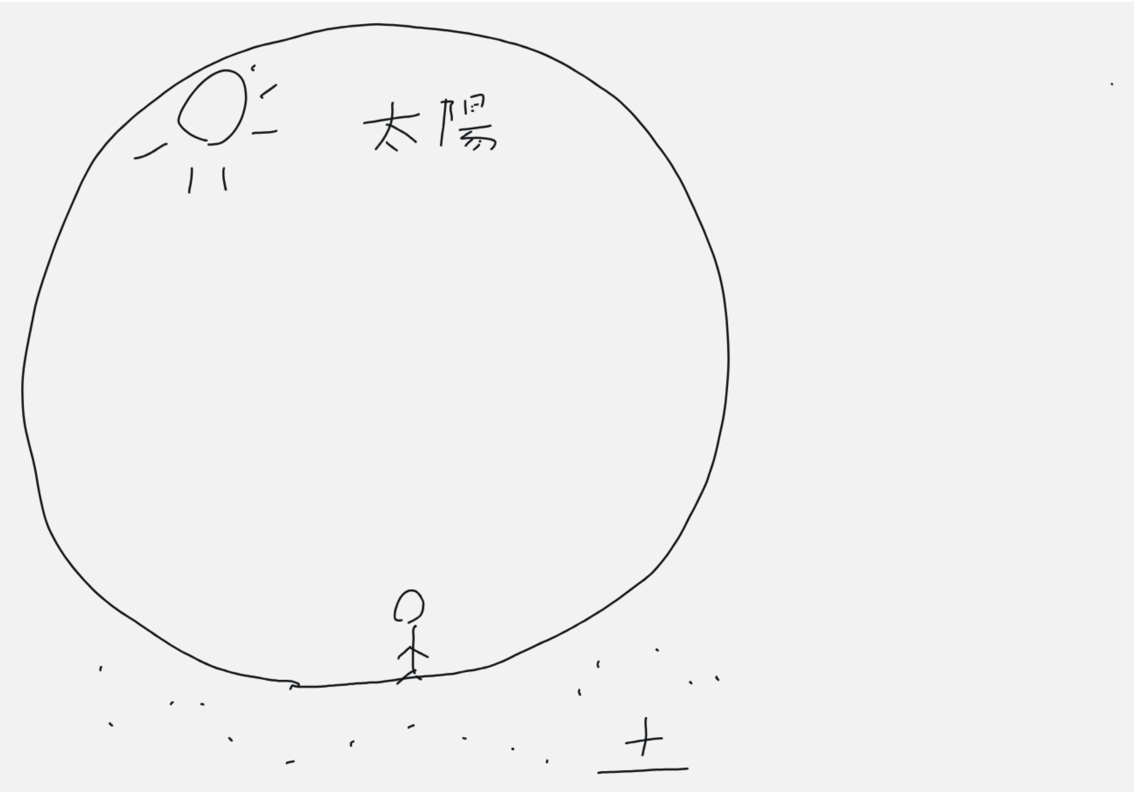
実数（数直線）を切断します。AとBに分け、$A < B$、$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$とするとき、(1)Bの最小値が存在し、Aの最大値は存在しない、(2)Bの最小値は存在せず、Aの最大値は存在する、のいずれかであることを習います。同じことですが、先ほどの視界の話は２次元でしたので、２次元の平面（普通の位相が入っているとして）を、曲線が境界となって２つに分けている場合は、局所的に片方が開集合で片方が閉集合です。大学院に行っても、常に境界というものは意識しなくてはならないものでした。先ほどの手の写真で言いますと、手のほうが境界を含むのでしょう。（人間はコンパクトなのでしょうか。）

手の写真は物理的な現象を意味しており、一方で、いま書いた話は数学の話です。一緒にはならないと思いますが、私は小さいころから位相のようなものに敏感だったらしいことが分かるという記憶の話でした。（この話は思い出しながら書いていましたが、確かに私は幼少のころからトポロジーっぽいものの捉え方をしていたようです。）

第３章　地球の認識

第１章で、私は幼少のころ、地球を３次元球体と認識していなかったということに少し触れました。当時、どのように地球を認識していたのかについて書きたいと思います。

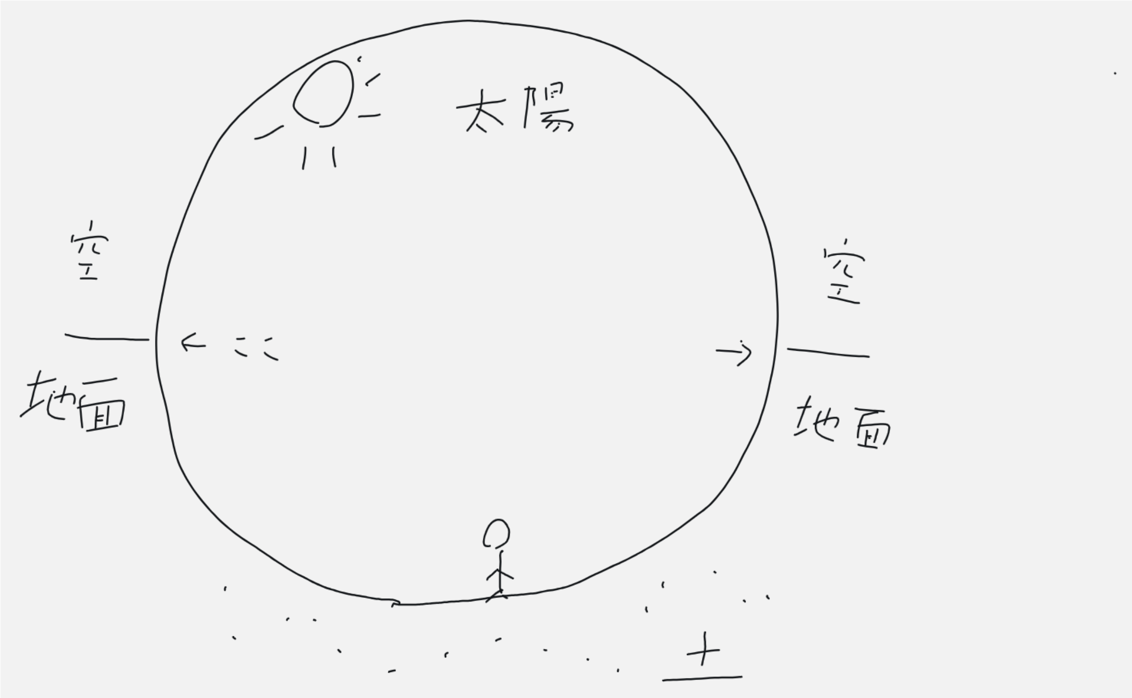
誰かが「実は地球は丸いのだ。しかし、あまりにも大きいので、われわれには平らに思えるのである」という話をしていました。複数の人からそう言われたかもしれません。それで、私は以下の図のように地球を認識しました。



つまり、われわれは地球という丸いものの内側に生きている。およそ上半分が、いわゆるプラネタリウム（そのようなものの見たことのあるずっと前ですが）のような天球で、下半分が、地面です。このように、丸いものの内側に住んでいるのだと思ったのです。(「地球は丸い」と聞いて、こう認識した人に会ったことはない気がします。「そうそう、オレも小さいころそう思った」という人に会ったことがないのです。)

したがって、親がこぐ自転車の、(後ろの席ではなく）運転者とハンドルの中間にあるスペースに乗っていたくらい小さいときですが、少し遠出して（それでも１キロメートルくらい行ったときだと思いますが)、だんだん上り坂となってきたので「そろそろ地球の端のほうへ来たかな」と思ったことを思い出します。

このように地球を認識しますと、以下の図のように、地面と空の境目が気になります。



私の住んでいたあたりは、田舎であったとはいえ、家はたくさん建っていました。家の下は地面であり、家の上は空でした。漠然とそれらの風景を見ていただけですが、地平線が見えるようなところではありません。以下は幼稚園のころの記憶です。

画用紙に絵をかく時間です。だいたい幼稚園生のかく絵は、家があり、木が生えていて空があり、人間がいたりするようなものです。（すみません。いまペンタブレットでかこうとしましたが、幼稚園児のかくような絵は、現在、再現が極めて困難であることに気づきました。絵を省略します。）

このようなとき、いま考えますと、地面は土の色のクレヨンでぬり、空は青くぬります。その境目はあいまいであるわけですが、私はだいたいそのような絵をかきながら、地面を茶色でぬり、だんだん上のほうまで土の色でぬりました。位相的には地面

と空が交わるわけではなく、それぞれが無限遠に向かっているのでしょう。

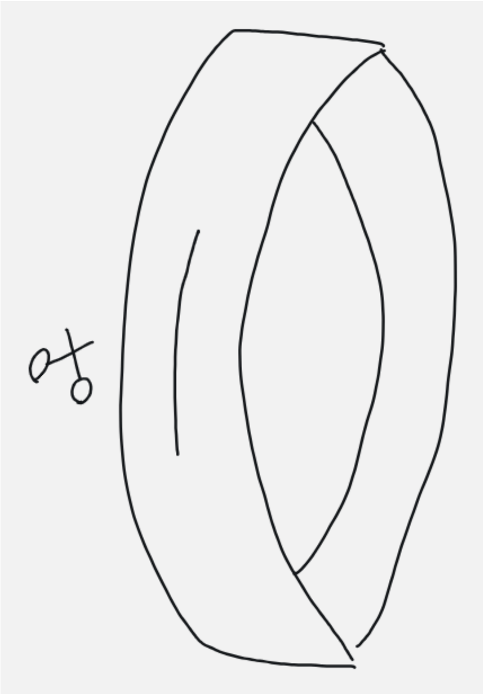
私は、下からだんだん地面を茶色でぬり、上のほうまでぬっていきました。下からだいたい画用紙の７割から８割くらいまで土の色でぬってから「まずい！すべて土になってしまう！空もぬらなきゃ！」と思ったわけです。あわてて、上のほうだけ空の色でぬりました。やたらと地面の割合の大きい、アンバランスな絵になったと思います。

これも、いま考えてみますと、地球を球面の内側に人間が住むものと認識し（半径が非常に大きいと曲率は０に近く）、そうだとすると地面も空も開集合なので、境目が分からない、という状況らしいと分かります。やはり小さいころの私は、位相的な発想をしていたらしいということを改めて思い出しています。

第４章　メビウスの帯

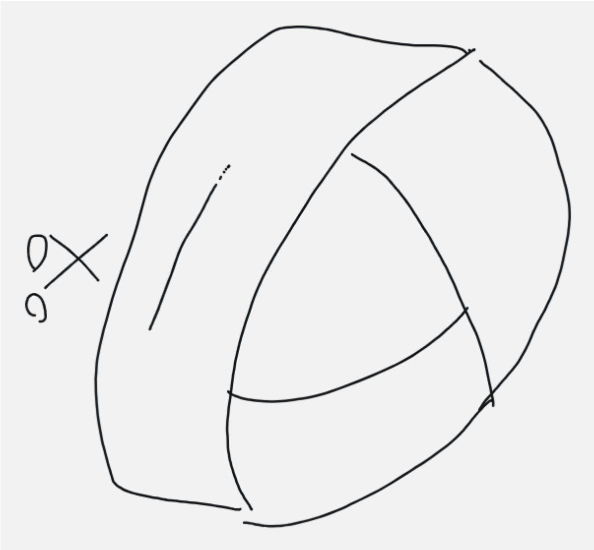
幼稚園に通っていたころのことです。クリスマス会がありました。私は年中と年長の２年間、幼稚園に通いましたので、そのいずれかのときのことです。理事長先生とみんなから呼ばれている男性の先生がいました。その先生の出し物がありました。新聞紙を細長く帯のように切ったものの両端をはりつけました。アニュラス（円柱の側面の形）ができたわけです。先生は、それを、はさみで中央を切りました。以下のよう

です。



すると、細長い丸が２つになりました。これは、みんな想定内です。

つぎにその先生は、同じように新聞紙を細長く切った帯を取り、それを、180°ひねってくっつけました。メビウスの帯ができたわけです。これを先生は、さっきと同じように、はさみで中央を切りました。これはよく知られているように、大きなひとつの丸となったわけです。園児たちは驚きました。



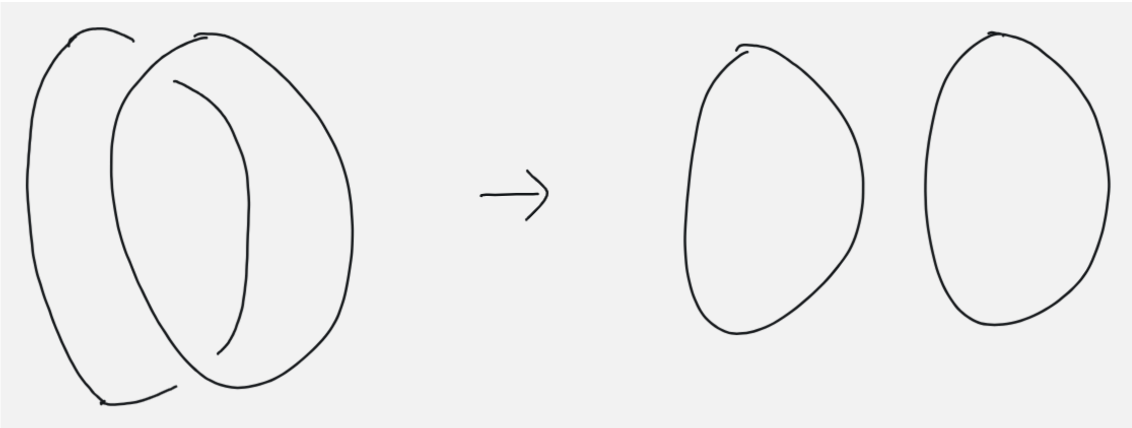
そのつぎにその先生は、同じように新聞紙を細長く切った帯を取り、それを、今度は、360°ひねってくっつけました。これは、最初に作ったアニュラスと同相なものができていますが、３次元空間への埋め込み方が違うのである・・・と専門的に学んだときに認識しましたが、３次元空間への埋め込み方が違うので、先ほどとは違うものです。それを先生は同じように中央の線で切りました。からまった２つの輪ができました。園児たちは驚いて喝采しました。

これでその先生のクリスマスの出し物は終わりです。（先生はサンタに扮装されていたかもしれません。サンタさんは自分がサンタであると強く主張していましたが、園児たちはその人は理事長先生であるととっくに見抜いていました。）

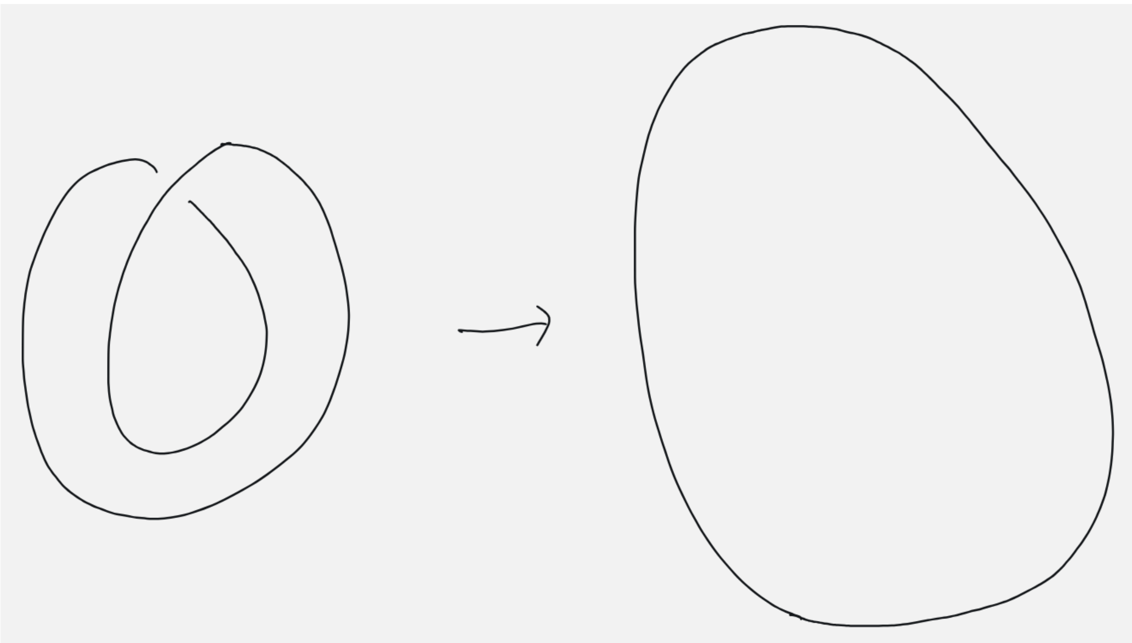
この話は、私の心に残ったらしく、この数年後、小学３年生くらいのとき（つまり倍の年齢くらいになったかもしれません）、この現象は、絵にかいて説明ができるように

なりました。

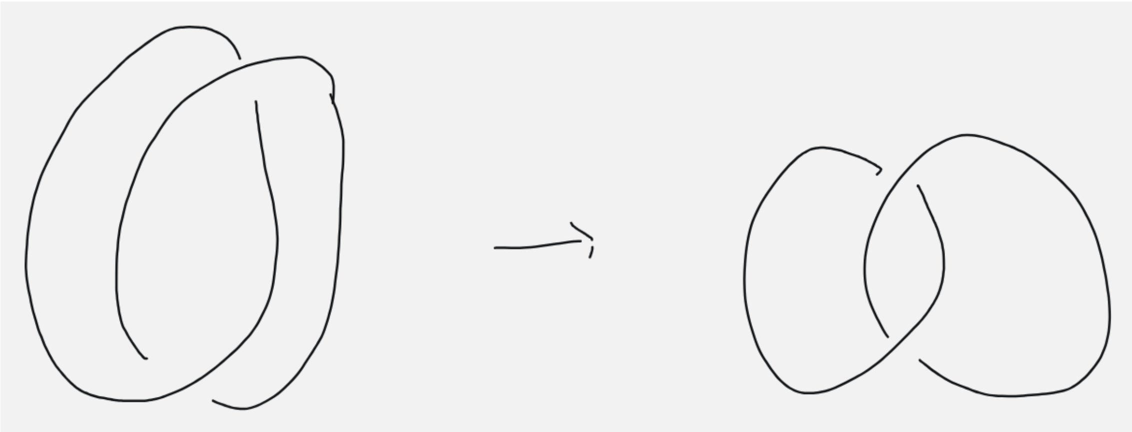
最初の、アニュラスの普通の埋め込みの絵ですが、以下のように、境界だけ考え、いわゆる変位レトラクトを考えるのです。すると、このアニュラスの境界は、２成分の自明な絡み目です。それが、このように絵にかくとわかるわけです。



つぎの、メビウスの帯のケースですが、これの境界の絵をかくと、以下のように、ひとつの大きな円となります。



最後の、360°ひねってくっつけた場合のアニュラスで、同じように絵をかきますと、以下のように、いわゆるホップリンクになります。



これが説明できるようになったときは、嬉しかったものです。いま考えると、私は確かに幼少のころからトポロジー的な発想をしており、かつ、長い時間をかけて考え、言葉にする能力を持っていたことになります。

第５章　入院、ねじれの位置、３次元の四色問題

幼稚園のとき、入院しました。１２日間の入院でした。ある日、看護婦さん（看護師さん）が、おしゃべりの相手をしてくださいました。いま考えると若い看護婦さんだったのかもしれませんが、私は幼稚園生であり、非常に年上の大人でした。私は、紙に絵をかいていました。もぐらのように地中を掘ってまわるマシンの空想をしていました。そんな話をテレビで見たのでしょう。紙の絵は、上から見た図であり、その地

面の下を、もぐらのようなマシンが掘って進みます。南北に流れる川を、川の東から川の西へ、もぐらマシンが進もうとして、私はそこで、それ以上進めないと言いました。もぐらマシンの行く手を、川がはばんでいるからです。看護婦さんは、川の下も掘れば進めると主張しました。私は、川があるから、これ以上、進めないと主張しました。看護婦さんは、川の下も掘れば進めるとおっしゃいました。ここで、議論が平行線となったことを覚えています。ずっとのち、数年後かもしれませんが、このときの看護婦さんの主張は、川のさらに下を掘れば、南北に流れる川の、東側から西側へ、そのもぐらマシンは掘って進めるということだったのだとようやく理解しました。その看護婦さんには申し訳ないことをしたという気がしたものです。私は、「川」というものをどう認識していたのでしょうか。果てしなく深いものだと思っていたのでしょうか。おそらくはそうではなく、私は「ねじれの位置」というものを、はっきり認識できていなかったということだろうと思います。

ＪＲ総武線と、ＪＲ山手線は、秋葉原の駅で、ねじれの位置となり、立体交差をしています。路線図で見ると交わっているように見えますが、ぶつからずに通っています。これは、３次元だから起きることです。中間値の定理も、２次元の関数のグラフで、必ず交わることを言っています。あるとき、以下のようなことを思いました。

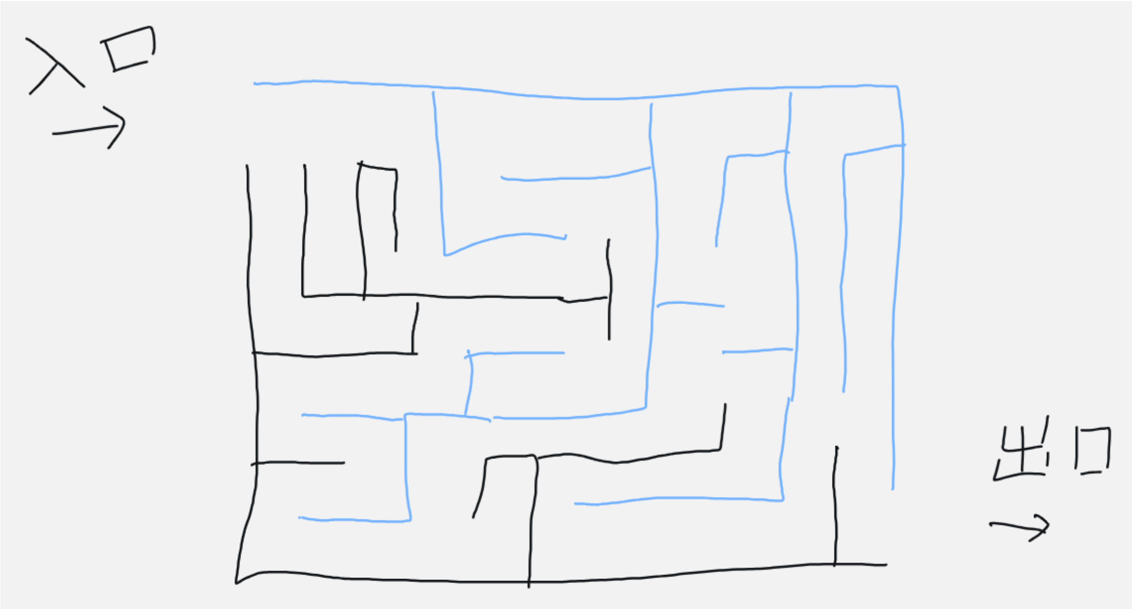
いつくらいのことか覚えていませんが、本で、四色問題というものを読みました。地図は、４色で塗り分けることができるというものです。確かに、私はそのころ、日本

の都道府県を、パズルにしたようなおもちゃを持っていましたが、その都道府県は、４色で塗り分けられ、隣り合う県は違う色になっていました。私は、考えてみました。いわゆる双対グラフをかいてみたのです。県を頂点とし、隣り合う県は辺で結んだわけです。それで、４頂点までは、紙のうえで、あらゆる頂点どうしを辺で結べるのですが、５頂点だと、あらゆる頂点どうしを、辺で結べないのです。「あれ？これで四色問題の証明は終わりではないか？」と思いました。おかしいです。本に書いてあることによると、四色問題の証明は大変であり、おそらくすごく多い有限の場合に持ち込んだのち、コンピュータを用いてしらみつぶしにしたようだからです。これは、それ以上、考えてみることがありませんでした。もちろん私が間違えているのでしょうが、私は四色問題の証明の難しさには触れずじまいでした。

それで、あるときふと、３次元の四色問題を考えてみる気になりました。これは、考えてみて、わりとすぐに気づきましたが、いくら色があっても足りないです。これも双対グラフを考えてみますと、いくら頂点がたくさんあっても、それらのうちの任意の２点を、辺で結べることに気づくのです。これはつまり、先ほど述べた、ねじれの位置の現象と言いますか、３次元だと、手前あるいは向こうを通ることによって、いくらでも反対側に行けるのです。

小学校の低学年のころではないかと思いますが、迷路をかくのが好きでした。あるとき気づきましたが、２次元の平面上にかいた迷路は、以下のような図の迷路であれ

ば、壁の連結成分の数は２です。これは、通っている道の左手に青、右手に黒の壁を見ながら進めばゴールにたどりつきます。３次元の迷路では、こういう議論（必勝法？）は使えないわけです。



中学のときに、２直線の位置関係で、３次元であり得たねじれの位置以上の位置関係は、４次元の空間であり得ないことに気づくことがありましたが、その話はまた日を改めます。本日は、幼稚園のとき、ねじれの位置をはっきり認識していなかった、という話でした。はっきり認識していないときは、よく分かっていない（はっきり認識したときは、よく分かる）という私の傾向は、幼少のころからあり、形を変えて、いまもあると言えるということに気づきます。

第６章　同値関係

小さいころ、絵本を読んでいて気になることがありました。よく、動物が出て来ます。「くまさん」や「りすさん」や「うさぎさん」などです。それで、人間も出て来ます。たとえば「たろうさん」です。こういう絵本はたくさんありました。それで、なぜ、たろうさんだけ固有名詞なのかが気になったのです。「くまさん」「きつねさん」という言い方で統一するなら、たろうさんではなく「にんげんさん」となるであろうからです。この疑問は長いこと言葉になりませんでした。「そうそう、オレも小さいころ、そう思っていたんだよ」という人にあまり会ったことがない気がするのです。（皆さん私と同じで、おっしゃらないだけかもしれないのですが。）

ずっとのちに知った概念で、「同値関係」というものがありました。同値関係とは、日常の用語で「同じ」という言葉で表されるものを、数学の言葉で言ったものだとだんだん分かりました。同じ店で出るエビピラフは、同じエビピラフと言ってしまいますが、エビ一匹一匹を区別するなら、すべて異なるエビピラフであることになります。正多面体は５種類と言いますが、それは、大きさ違いを区別せず、どこに置いてあるかも区別せず、色違いも区別をしなかったとき、５種類（５つ）であるわけです。同値関係はさまざまなところにある現象で、どれとどれを同じと思うかで、世の中の見え方が変わるわけです。

先ほどの絵本の話で言いますと、「くまさん」というときは、くま同士を同値関係で結び、その同値関係で割って、「くま」でひとつと見ているのです。確かに、そういう絵

本で出てくるたろうさんは、大概は人間で唯一の登場人物だった気がしますので、人間という人間もすべて同じとみなし、「たろう」で代表させているのだろうかといま思うわけです。

あるいは、もしかしたら、身近にあるものほど区別ができて、自分から距離の遠いものは区別ができないのかもしれません。人間は身近だから固有名詞で呼び、動物は少し自分から距離があるので、おおまかに種で同じとみなしているのかもしれません。私は九州から非常に遠くに住む人間で、九州にあまり行ったことがありませんが、友人が福岡から熊本に帰省すると言うとき、どうも福岡と熊本が同じように思えることを白状せねばなりません。「アフリカ」というと、私にはそれ自体でひとつに思えます（実際には大陸だからものすごく広く、さまざまなものがあるのでしょうが)。私は学生時代、オーケストラをやっており、「スター・ウォーズ」のテーマをアンコールにやったことがあります。「スター・ウォーズ」のテーマと、「スーパーマン」のテーマの作曲者は同じで、ジョン・ウィリアムズですが、あるときある人にそれを言ったら、「ああ、だいたい同じだね、同じ人が作ったねー」と言っていました。これは、しろうとの意見であるとも言いますし、悟りきった人の意見であるとも言えます。距離のある人にはだいたい同じに見えると同時に、それはとても客観的な意見であるとも言えるわけです。

数学では、同値関係で割ることをしばしばしました。それで、議論が明確になったり

するわけです。日常的には、りんごとみかんとバナナを「くだもの」と認識するような見方は、ものを認識するときの大切な見方でした。帽子という帽子を同じと認識したとき、帽子 1 つ、帽子 2 つと数えることができます。帽子とちり取りをあわせて 2 つと数えることはナンセンスだったりします。本日は小さいころ感じた、絵本の違和感の話でした。

第 7 章　7 が 10 個で 70 だ（かけ算の交換法則について）

私は小さいころ、体が弱かったです。いまでも弱いわけですが、小学 1 年のとき、小児科で、注射を受けることになりました。毎週 1 回、10 週間にわたって注射を受けることになっていました。周囲の大人に言われて、私は 10 週間が何日であるか、計算し始めました。

当時の私はまだかけ算を習っていません。足し算は習っていました。私は、7 と 7 を足しました。7+7=14 です。2 週間は 14 日でした。では、3 週間は何日でしょうか。私は 14 に 7 を加えました。14+7=21 です。3 週間は 21 日でした。それで、4 週間が何日であるかを知るために、21+7 を計算し、28 日でした。これに 7 を加え、5 週間は 35 日でした。

たいへんな計算です。私は疲れました。あと 5 回、7 を足さねばなりません。私はこ

こで名案を思い付きました。5 週間で、35 日だということはわかったのです。10 週間が何日かを知りたいのであるから、35 と 35 を足せばよいではないか。（かけ算を習っていないので、35 の 2 倍という発想はなかったことになります。）それで、35 と 35 を足しました。35+35=70 です。ついに、10 週間が何日なのか、計算できました。70 日です！これで喜んでいると、周囲の大人が言いました。「7 が 10 個で 70 だ」。私は衝撃を受けました。「7 が 10 個で 70 だって？10 が 7 個で 70 ならわかるけど！これは偶然か？」

10 が 7 個で 70 がわかるとは、以下のような意味です。10+10 は 20 です。20+10 は 30 です。これは、いかにも 10 というまとまりが 7 個なので、70 になることは自然です。しかし、7 が 10 個で 70 は信じがたいわけです。先に計算しました通り、7 たす 7 は 14 であり、それに 7 を加えると 21 であるわけです。なんらかの規則性が見えるわけではありません。7 が 10 個で 70 だと言われたときの衝撃は大きかったわけです。

これは、かけ算を習う前の話であり、この翌年に私はかけ算を習い、かけ算では交換法則が成り立つことを習ったわけです。このときの記憶から、かけ算の交換法則は自明ではないという認識があります。足し算の交換法則は自然に思えますが（かえる 3 匹にあと 4 匹を加えるのと、かえる 4 匹にあと 3 匹を加えるのは、同じく 7 匹になるというのは当たり前に思える）、かけ算の交換法則は明らかではない話でした。当時「これは偶然か？」と思っただけで、ここを深めることはしていません。もしかした

ら、難しくて深められる前に、２年生になってかけ算の交換法則を習ったのかもしれません。10 週間で、日曜が 10 個、月曜が 10 個、火曜が 10 個、・・・だから、10 が 7 つで 70 日と考えられると当時の私に言ったらどういう反応を示したか、わからないものだとずっとあとになって思いました。

第８章　幼少の記憶をたどる旅（集合と写像）

以下の話は大分くだらない気がして、「自伝風の読み物」に含めないつもりで書きましたが、含めることにします。集合と写像に関する話です。幼少の記憶をたどる旅をしていて、いろいろくだらない話も思い出すのです。

最初に、集合と写像の話をします。竹之内脩『入門　集合と位相』の最初のほうを読み返していますが、著者のものを見る目の深さに圧倒される思いです。（これは私が東大の数学科の学生であった 95 年の冬学期から持っている本です。2 年の後期に集合と位相の授業がありました。）第２章の集合のところで、写像の例として、ものの集合から名前の集合への写像fが、ものを名前で呼ぶという現象として書いてありました。人間を名前で呼ぶときは、同姓同名の人がいるので、単射ではないわけです。また、人間に性別を対応させるのは、人間から{男,女}という集合への写像であるというわけです（この写像も単射ではない)。それで、以下のような話をします。

小学校の音楽の時間に習った歌で、「南の島のハメハメハ大王」というものがありました。この歌を最後まで歌うと、島の住民のすべてが、ハメハメハという名前であることが分かります。この場合、島の人の集合から名前のなす集合への写像は、定値写像となるわけです。これは、名前としては意味をなさないことになります。なぜなら、名前というのは、人を区別するためにあるからです。聖書に出てくるヘロデ大王も、一族みんなヘロデという名前みたいですが、やはり区別する必要があるようで、ヘロデ・アンティパスとか、ヘロデ・アグリッパなど、区別するための言い方をするわけです。また、使徒ヨハネと、ヨハネによる福音書の著者と、ヨハネの手紙の著者、ヨハネの黙示録の著者も、必ずしも同一視はできないわけです。同じ名前の違う人はいるからです。実際、使徒ヨハネと洗礼者ヨハネは違う人物です。

位相不変量は、同じ位相であれば、同じものを返します。違う位相であったからと言って違うものを返すとは限りません。例ですが、基本群が違ったら違う図形であると言えますが、基本群が一致したからといって同じ位相であるとは言えません。これは、さっきの名前の話で言いますと、違う名前であったら違う人と言えても、同じ名前であったからといって同じ人とはいえないようなものです。そこで学生証番号のようなものがあり、同じ番号であれば同じ人物であることがいえるようにしてあるわけです。マイナンバーも同様で、違う番号なら違う人だといえるのみならず、同じ番号なら同じ人だといえてしまうなかなか恐ろしいものであると言えるでしょう。この、

逆がいえるものを、完全不変量と言うわけです。

それで、似た名前なら似たものか？という話に移ります。ものの集合と、名前の集合のいずれにも、位相を入れます。似たものは近い、名前も似たものは近い、となるような位相を入れるのです。そして、先ほどの写像fは、連続写像であると信じることにしますが、この連続性が、しばしば崩れるのです。幼少のころの記憶をたどるうちにだんだん思い出したことですが、このfという写像を構成することが、子供のころの、ものの名前を覚えるということであったと思うのです。

似た名前であるものの、違うものとして、たとえば「まぐれ」と「まぐろ」が思い出されます。小さいころ、この２種は紛らわしいものでした。「ばってら」と「バッテリー」も同様です。幼稚園生のころ、ヤマハ音楽教室に通っていましたが、「くーらい、くーらい（暗い、暗い)」という歌を歌いながら、私の目はクーラーを見ていました。こういう幼少の記憶がある人は、しばしばおられるのではないでしょうか。(考えてみますと、「まぐろ」と「ばってら」は、おすし用語ですね。）この、似た名前ならば意味も似ているはずだ、という、fの連続性が崩れる場合に起きるのが、ダジャレという現象であることにも気づかされます。逆に、意味が似ている言葉で、まったく違うものもときどきあり、私は「まぐれ」と「偶然」の区別がなかなかつかなかったことも思い出します。(「まぐれ」という語は、発音は「まぐろ」に似ていて、意味は「偶然」に似ている。)「じきに」は長いこと「そのうちに」という意味にとっていまし

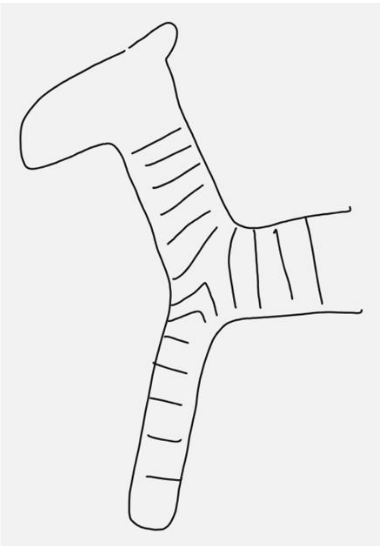
た。実際には「すぐに」という意味のようでしたが、「じきに治るよ」と言われたときは「そのうち治るよ」と解していたわけで、それで問題はありませんでした。「だるい」という状態は、どのような感覚か、しばらくわかりませんでした。体の調子が悪い意味で使うことは知っているものの、どのような体の不調のときに使うのか、どうしても分からなかったです。このようなことを、これらの記事を執筆する数日で、漠然と思い出しているわけですが、私は自分の物ごとのとらえ方に、かなり他の人と違う特徴的なものがあることに気づきつつありますので、これらのことも、心にとめながら、引き続き幼少の記憶をたどりたいと思ったわけです。

第 9 章　葉層構造

小学校に上がる前の記憶だと思います。シマウマのしま模様に興味を持っていたことを思い出します。小さいころ、動物の図鑑を持っており、ぼろぼろになるまで読んだものです。動物園で実物のシマウマを見たのはいつでしょうか。幼稚園の年長のときだったように思います。

49 歳になった昨年（2025 年）、4 月に久しぶりに動物園に行きました。シマウマを見たときに思い出したことがあります。小さいころの私は、シマウマのしま模様に興味を持っており、それは、葉層構造としての興味の持ち方だったな、と思ったのです。

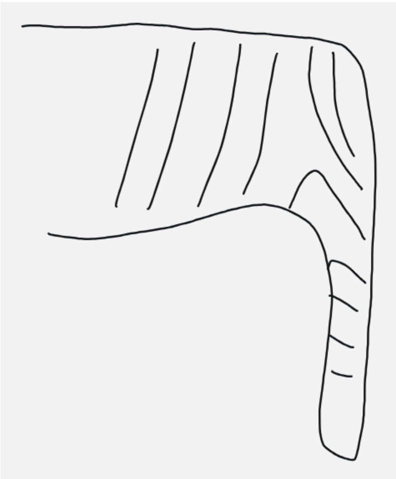
シマウマの絵はうまくかけませんが、以下、ご容赦ください。以下のように、しましまをかいていきます。シマウマの首は局所的にアニュラスであり、普通のしましまがかけます。胴体のほうもそうです。もっとも腹のほうにはしまがなかったりしますけれども。足も同様です。（前足は２つありますが、当時の私がどこまで考えていたのかはよく思い出せません。前足２つを考えると以下の話はかなり難しくなるので、そこは考えていなかった気がします。）それで、図のように、首と胴体と足の中ほどに、しまが３つに分かれるところができるのです。



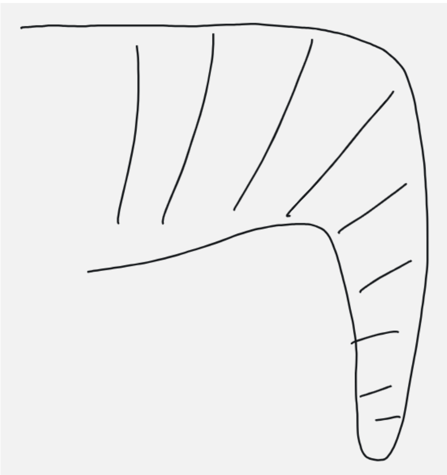
これは、シマウマのしまをかくとき、どうしても生じる点で、非常に気になりました。これがうまくかけないと、シマウマを紙にかくことはできないのです。

それで、首と胴体と前足のところは、そのようにしまをかけばよいわけです。後ろ足のところも同様にすればよいでしょう。前足の上のほうと同じようなしまをかいてみ

ました。



それで、改めて図鑑をみてびっくりしました。確かにそういうしま模様のシマウマもいたのですが、以下のような模様のシマウマもいたのです。



なるほど。後ろ足はそういう模様でいいのか。（後ろ足も、２本あることは考慮していなかったと思います。）後者のようなしま模様であれば、さっきのようなしまを３つにわける点はなくてよいわけです。

これはおそらくシマウマのしましまへのトポロジカルな興味の持ち方であったと、小

さいころの自分を振り返った次第です。

第１０章　三角形の内角の和は常に 180°

小学校の１、２年のときの担任の先生は非常に恐ろしい先生で、毎日のように厳しく叱られました。私はいまもそうですが、整理整頓が苦手であり、忘れ物やなくし物が非常に多かったからです。学業もそれほど振るわず、いわゆるクラスにおける「カースト」も最下位でした。小学校３年、４年のときの担任の先生は、１、２年のときの先生より恐ろしくなく、いま考えると理系の先生であられたと思います。印象に残る算数の授業がいくつかあります。本日はそのうちのひとつである、三角形の内角の和が常に180°であることの証明を聴いた話です。（したがって、これは小学３年か４年のときの思い出です。当時はこのことは小学３年か４年で習ったことになります。）

三角形の内角の和が常に180°であることは、この授業の少し前にどこかで聞いて知ったと思います。その話を聞いたときは、信じられませんでした。しかし、どうも確かにそうなるようです。直角三角形ならば信じられると思いました。直角三角形の場合は、１つの角が直角で、残り２つの角の和は、いかにも90°になりそうだったからです。しかし、一般の三角形でこれが成り立つことは信じがたい気がしました。隣の席の女子に、この fact をしゃべってみました。彼女も信じられないと思ったようで、い

ろいろな三角形を紙にかいてきました。「これでも成り立つのか？」ということだった

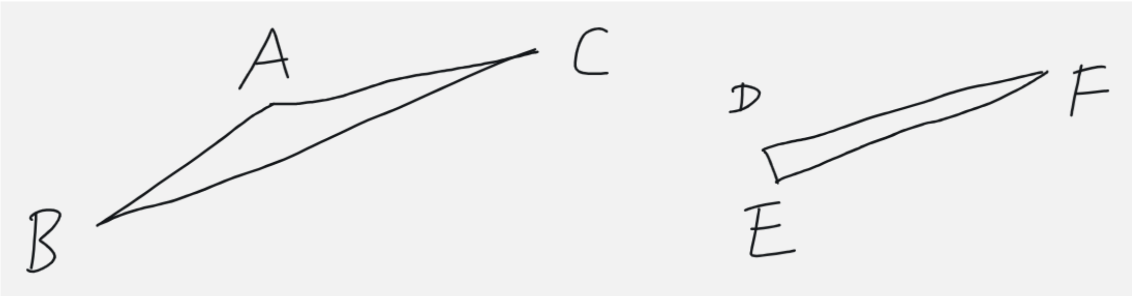
と思います。彼女のかく三角形は、極端な、すなわち、ひとつの角が0°に近かった

り、180°に近かったりするような、ぺっちゃんこなものが多かったですが、確かにそ

のような三角形でも、３つの角の和は常に180°になるのでした。驚異でした。（以下の

図で、理想的に∠Aを180°、∠Bと∠Cをそれぞれ0°と考えても成り立つ。また、∠D

と∠Eを90°、∠Fを0°と考えても成り立つ等。）



それで、このことについて授業で習った日があるわけです。

先生は、この主張の証明に、まる１回の授業を費やされたと思います。１時間の授業

は 45 分だったでしょうか、40 分だったでしょうか。私は、感動とともにそのお話を

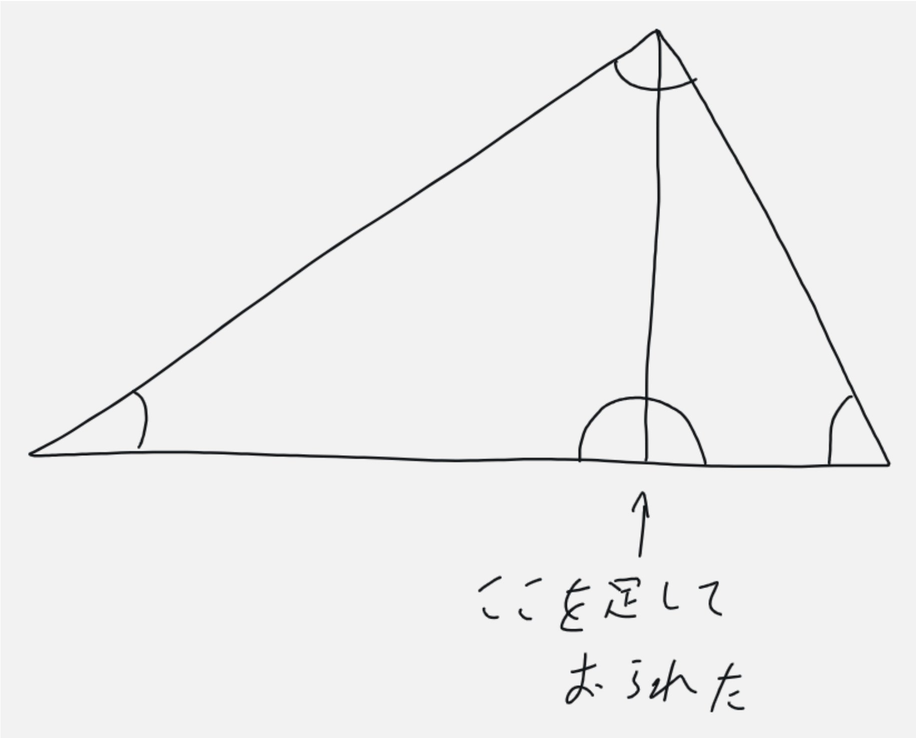
聴いていたと思います。確かに、三角形の角の和は常に180°になる！

今、書きながら思い出しますと、こういう授業が感動的であったのは、理由をきちん

と述べるという、「証明」の授業だったからだと思います。つまり、三角形の３つの角

の和が常に180°であることも、次の章で述べる、円周率が3より大きいことも、誰がいつやってもそうなります。19世紀まで円周率は3より小さかったが、20世紀に入ってから円周率は3を超えた・・というようなことはないわけです。そのような数学上の命題について、理由をきちんと述べる授業であったので、感動したのだと思い出します。

さて、先生は、以下のような場面で立ち往生をなさったことを思い出します。三角形の角の和が、360°になったのです。私は見ていて、以下の角を足しているからだと気づきましたが、言えませんでした。先述の通り、クラスのカーストが最下位で、先生の授業に口出しできるような地位にいなかったからでもあります。



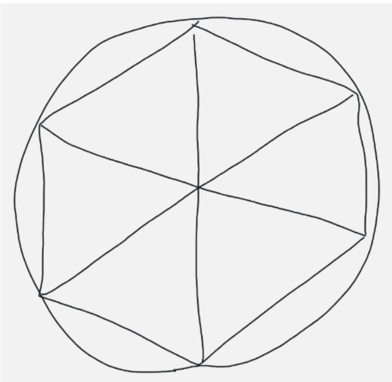
ずっとのち、私は高校生のときに、ガウス・ボンネの定理の一部を発見・証明していたということがありましたが、その話はまた章を改めます。この、三角形の角の和が常に180°になるという性質は、ユークリッド幾何の特徴なのでした。とても感動的だった算数の授業についてでした。

第１１章　円周率、円の面積、高校時代の循環論法

小学生のときのことです。３年、４年のときの担任の先生は、穏やかな女性の先生で、印象に残る算数の授業がいくつかあります。本日、ご紹介するのは、そのうちの２つで、円周率に関する授業と、円の面積に関する授業についてです（そしてそれに

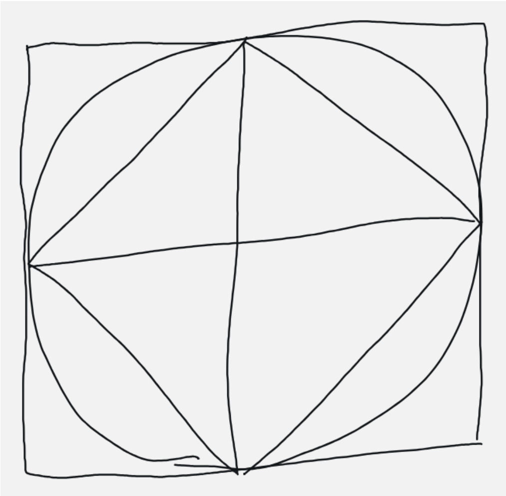
伴う高校時代の思い出も）。

円周率を習ったときのことです。先生は、円周率が3より大きいことの証明をなさいました。円の、直径の長さと、円周の長さが比例することを認めた上で、その比例定数が、3より大きいことを示されたのです。円に内接する正六角形の一辺の長さは円の半径の長さに等しいので、その正六角形のまわりの長さは、半径の6倍すなわち直径の3倍であるわけですが、それよりも円周のほうが外側を通っているので、それよりは長いでしょう？という「証明」でした。感動して聴きました。同様にして、円周率が4より小さい話が続きました。円に外接する正方形の一辺の長さは円の直径の長さに等しいので、その正方形のまわりの長さは、直径の4倍であり、それよりも円のほうが内側をまわっているから円周率は4より小さいのです。非常に感動的な授業でした。

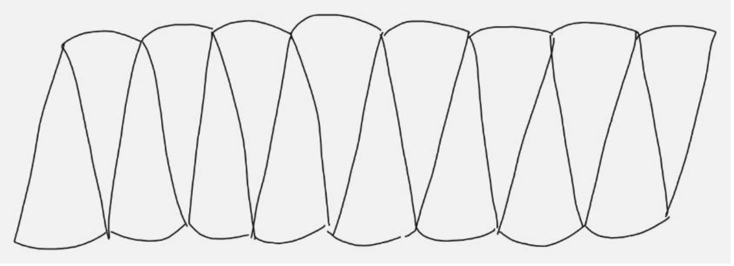


別の日のことです。円の面積の公式を習いました。円の面積は、半径かける半径かける3.14であるわけですが、先生の説明は以下のようでした。円の面積が、半径の2乗に比例することは認めた上で、その比例定数がいくつであるかです。円に内接する正方

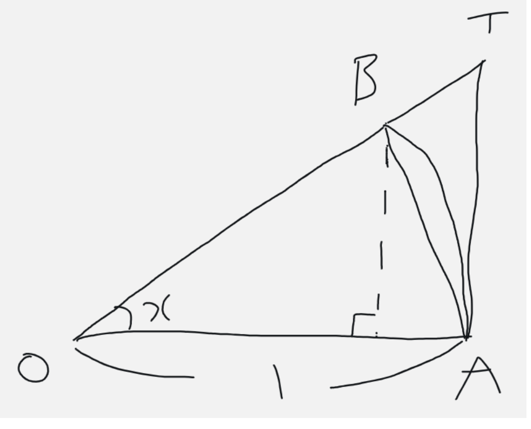
形は、対角線が直径であり、その面積は、直径かける直径の半分、すなわち、半径かける半径の2倍です。その正方形より円のほうが面積が大きいので、その比例定数は2より大きいわけです。そして、円に外接する正方形は、一辺の長さが直径の長さに等しく、その面積は、直径かける直径、すなわち、半径かける半径の4倍です。その正方形より円のほうが小さいため、その比例定数は4より小さいわけです。ここまでで、円の面積は、半径かける半径かける2よりは大きく、半径かける半径かける4よりは小さいことが言えました。ここまで説明した先生はにやっとなさり、「皆さんご想像の通り、これは3.14になるのですよ」とおっしゃったわけです。私は心のなかで「先生、いまごまかしたな！その数は、2より大きく4より小さいことを言っただけで、それが円周率に等しいとは言っていないではないか！」と思ったわけですが、それは口にしませんでした。前にも書きましたが、そのころの私はとにかく整理整頓ができず、なくし物、忘れ物が絶えないだらしない生徒であり、クラスのいわゆる「カースト」も最下位であったため、そのような口出しができる位置にいなかったからというのは大きかったと思います。でも、その先生の説明で、その数がほぼ円周率そのものであろうというのは充分に納得できました。



このあと、その円の面積の公式を、以下のように導く話を聞きました。これは本で読んだのであったかもしれません。円を、細かいおうぎ形に分けるのです。そして、以下の図のように、互い違いに組み合わせて、平行四辺形に似た形を作るのです。円の面積は保たれています。この、円を細かいおうぎ形にわける操作を、中心角を果てしなく細かく取りますと、この平行四辺形に似た図形は、ほんとうに平行四辺形に近づきます。(「平行四辺形」と書いてありましたが、私は、長方形に近づくではないかと思って読んでいました。現代の算数の教科書は、「長方形」と書いています。しかし、感覚的には平行四辺形と書いたほうがいいのかもしれません。)それで、この平行四辺形(長方形)の面積は、底辺の長さが円周の半分、高さが半径なので、(円の面積)=(円周の半分)×(半径)=(直径×3.14)÷2×(半径)=(半径)×(半径)×3.14、と円の面積の公式を導くのです。これはこれで納得しました。



これからかなりの時間が経過したのちの話になります。高校２年か３年のときの話です。三角関数の微分を習うよりも前の話であるはずです。$x \to 0$のとき、$\frac{\sin x}{x} \to 1$という性質を習ったのです（11.1）。これは、教科書にあるように、はさみうちの原理を用いて先生が証明されました。以下に証明の概略を書きます。現代の教科書も同様の証明です。以下の図で、中心角がxで、半径が1であるようなおうぎ形OABを考えますと、その面積が、三角形OABの面積よりは大きく、三角形OATの面積よりは小さいわけです。



三角形OABの面積は（高さが$\sin x$ですので）$\frac{\sin x}{2}$、三角形OATの面積は（高さが$\tan x$ですので）$\frac{\tan x}{2}$であるわけで、以下が成り立ちます。

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

全体に$\frac{2}{\sin x}$をかけて

$$1 < \frac{\mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}} < \frac{1}{\cos \mathrm{x}}$$

この逆数をとって

$$1 > \frac{sin\ x}{x} > cos\ x$$

ここで$\mathrm{x} \to 0$とするとはさみうちの原理より(11.1)が言えるわけです。これを習ったあと、少しこれに基づく練習問題などをやってみて、気になったことがありました。この証明は、おうぎ形の面積の公式を用いているわけです。つまり、円の面積の公式を用いている。そして、どのようにして円の面積の公式を導いたのか、思い出してみれば、円を細かいおうぎ形に分け、その中心角を0に近づけることで導いたわけです。つまり、円の面積の公式を導くとき、(11.1)は認めたことに気づかされるわけです。そして、この理屈を小学校のときに習って以来、円の面積の公式の知識は更新されていない。それで、そのあと、職員室の先生をたずねました。(このころ私は県で一番の進学校とされる高校に行っており、もう小学校のときのような「カーストが最下位」という状態ではありませんでした。)先生は、私の言う意味は理解してくださいました。そして「確かにこれは君の言う通り、循環論法ですね。この証明は、大学に行ったら習いますから・・」と言われたのですが、大学に行ったらこの性質は当たり前すぎてあえて習うことはなかったのでした。

後日談ですが、私が大学院まで行き、博士課程で病気をして以来、数学者としての道を断たれ、失意のなかある地方の高校の教諭をしていた三十代、一回だけ「数学Ⅲ」を教える機会があり、そのとき教科書に載っていた証明はこのときのものと同じでした。職員室の他の先生がたの意見を聞いてみましたが、ある先生が、高木貞治『解析概論』を持って来ました。高木先生は「そうなるようにラジアンを定めたのであるから当たり前であるが」と前置きしたうえで、違う証明を書いておられましたが、まさにこれはそうなるようにラジアンを定めたのでありますから当たり前でありました。円周率は奥の深い数ですね。

さらに後日談ですが、この高校の教諭であった時代に、東大の入試問題で、円周率が3.05より大きいことを示せ、というものが出たことをある生徒さんの話で知りましたが、それは、最初に書きました通り、円に内接する正六角形のまわりの長さを考えると3より大きいことは言えるので、円に内接する正十二角形くらいで考えればいいのだろうとすぐに予測ができるわけです。私は細かい大学入試問題を解くのはむしろ苦手でしたが、こういう問いならすぐにわかるわけです。そうしますと、小学３年、４年のときの担任の先生は、かなり実力がおありであったことになりますね。

第１２章　キロリットル

キロという単位は、小さいころから耳にしていました。重さと速さの単位でした。体重は何キロと言います。速さは、親の運転する自動車の速度メーターで「40 キロ」というようなものを見ていましたし、以下のこともあります。ぼろぼろになるまで読んだ動物の図鑑で、見開きで動物の速さが比べてあるページがありました。動物たちがみんな左へ向かって走っており、左ほど速い動物がかいてありました。ブタが 17 キロ、ゾウが 40 キロ、キリンが 51 キロだったのをよく覚えています。このようなところでキロという単位に触れていました。

速さの「キロ」は時速何キロという意味で、もともとキロメートルは長さの単位であり、時速とは 1 時間で何キロ進むかを表しているものだ、ということはいつ知ったでしょう。チーターは時速 100 キロ以上出ていましたが、これは、チーターは 1 時間で 100 キロ進むわけではなく、瞬間的にその速さが出るのだ、ということも教わりました。この図鑑で、人間は 36 キロと書いてありました。そのころ世界的に足の速い人は 100 メートルを 10 秒で走っており（カール・ルイスだったでしょうか）、その速さでずっと走ると、600 メートルを 60 秒すなわち 1 分で走り、6 キロを 10 分で走るので、確かに 36 キロを 1 時間で走ります。私は非常に足が遅く、カール・ルイスの半分の 50 メートルも 10 秒よりよほど長い時間をかけねば走れなかったので、この図鑑の、人間は時速 36 キロ、という記述に驚き、それではゾウ 40 キロ、キリン 51 キロというのも、世界的に最も速い個体の速さなのだろうと思いました（が、いまこうし

て幼少のころを思い出して書いてみますと、これは本当にそうなのか、生物学の専門家に聞いてみねばわかりません)。

重さについて、小学校に上がるころの記憶に戻ります。動物図鑑とは別の本だったと思いますが、あるゾウの重さが 12 トンだと書いてありました。1 トンが 1000 キロだと知った私は、このゾウは 12000 キロだね、と言って周囲の大人にやたら感心された覚えがあります。

大人に何度も、重さのキロ、速さのキロ、長さのキロについて聞いたと思います。重さのキロはキログラムで、グラムの 1000 倍。長さのキロはキロメートルで、メートルの 1000 倍だと知ったのです。ミリリットルやミリメートルの意味もわかりました。デシは$\frac{1}{10}$で、センチは$\frac{1}{100}$。以下はおそらく小学 3 年生くらいの記憶です。

「キロリットル」という単位を思いついたのです。かさの単位で、リットルの 1000 倍です。

最初、1 キロリットルは、はなはだ多く、学校のプールの水くらいあるのだろうと思っていました。1 メートルに対して 1 キロメートルははなはだ長く、1 グラムに対して 1 キログラムははなはだ重いからです。ノートの余白に（へたな）マンガをかき「1 キロリットルの水です」と書いて、プールの水のような絵を描いたのを覚えています。どれくらい時間が経過したでしょう。よく考えてみると 1 キロリットルは、ぜんぜん

プールの水ほどもないのです。1 辺が 10 センチメートルの立方体の体積が 1 リットルであるので、3 辺をそれぞれ 10 倍したもの、すなわち 1 辺が 1 メートルの立方体の体積が 1 キロリットルだったのでした。これはお風呂の水よりは少し多いでしょうが、プールの水よりずっと少ないのでした。「3 乗」というもののものすごさを思い知ったときでした。

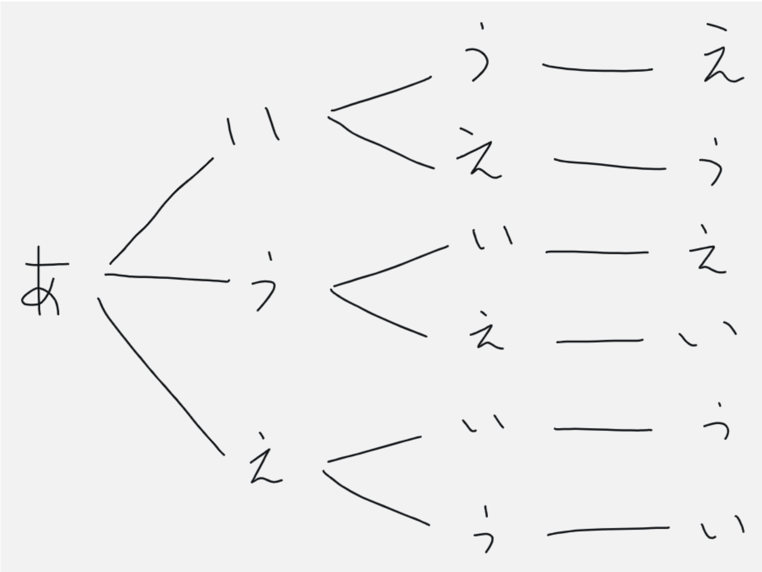
（私はついにキロリットルという単位は学校で習わなかった気がします。現代の小学生は、体積を習う小学 5 年生で、キロリットルという単位は習います。）

第１３章　４つのものの並べ方は$4 \times 3 \times 2 \times 1$通り

小学校の 5 年か 6 年のとき、担任の先生が、4 つのものの並べ方を、黒板に樹形図でかかれました。

左から右へのびる樹形図でした。24 通りありました。

それを見ていて、それが、$4 \times 3 \times 2 \times 1$通りであることに気づきました。よく知られた理屈ですが、最初の枝分かれは 4 つであり、その次の枝分かれでは、1 つ固定されているので、それぞれ 3 つずつであり、その次の枝分かれは、2 つ固定されているので、それぞれ 2 つずつ、最後は 3 つ固定されているので、それぞれ 1 つずつだからです。以下の図は、その樹形図の上 4 分の 1 をかいたものです。



（現代の小学生も、この「4 つのものの並べ方を樹形図にかく」のは 6 年生で習います。場合を順序よく整理することを習うわけです。4 つのものの並べ方が$4!$通りであることを習うのは高校での「数学 A」においてです。）

このことに気づいた人が最初にやることがあります。

5 つのものの並べ方が、計算上、$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$通りだということになって、多くて驚いたわけです。

そして、実際に 5 つの文字を並べてみて、本当に 120 通りあって再び驚きました。

このことに習う前に気づいていた人に自分以外で会ったことはないと思います。皆さん言わないだけなのかもしれないのですが。

第１４章　反比例のグラフ

短いエピソードです。小学校のころの記憶です。

比例のグラフを習いました。右肩上がりの直線になりました。それはほぼ想像通りでした。（負の数をまだ習っていないので、いわゆる第一象限だけのグラフです。）次に、反比例のグラフを習うことになりました。私は漠然と、右肩下がりの直線になるのだろうと想像していました。ところが、確かに右肩下がりの線になるのですが、そのグラフは大きく曲がっていました。予想を裏切られたので、驚いた記憶があります。確かに考えてみれば、反比例のグラフがx軸やy軸に交わっていたらおかしいので、先生が黒板にかいた曲線のようになるわけですが、それにしてもちょっと驚いたことを思い出します。以上です。

第１５章　0 より小さい数

0 より小さい数があるらしい、ということは、小学生のころから、漠然と聞いて知っていました。ただ、それがどういったものであるのかは、習うまで混沌としていました。いつだったか、地震があって、テレビで震度を言っており、私は「震度いくつ」と言うべきところで間違って「零下何度」と言ってしまい、笑われたことがあります。つまり「零下」と言ってもそれはマイナスと認識しておらず、「零下」という言葉

のあとに正の数が続くように認識していたらしいわけです。それで、中学に入って、負の数を習いました。習ううちに、負の数のほうにも、秩序だった世界が広がっていることをだんだん認識したわけです。習ってみますと、0 より小さい数を考えるのは自然な発想だったのでした。これは、三角比を一般の角で定義した人、あるいは、非ユークリッド幾何を考えた人も同様の気づきであり、そう考えることで、そちらにも秩序だった世界が広がっていることを示した偉大な先達がおられるわけです。(非ユークリッド幾何の存在に最初に気づいていた人は、ユークリッドさんである気がします。「小さい数から大きい数は引けません」と主張する大人は、負の数の存在を知っているように・・・。)

それで、中学生のころの話ですが、学校でもらった何らかの教材の余談のようなところで、群のような発想について書いてあったことを思い出します。演算として足し算あるいはかけ算を考え、単位元というものがあって、足し算の場合は 0、かけ算の場合は 1 と考えられるというわけです。途方もない屁理屈に思えました。それはまあそうだけど、おかしな考えだなあ、またなんでそんな変なことを考えるのか、と感じたわけです。このようなエピソードを思い出すにつけ、私は代数的な発想はしていなかったらしいことが分かるわけです。群のようなものを考える動機がないままに紹介してあったからかもしれません。

第１６章　『ゲーデル、エッシャー、バッハ』

中学生のころの思い出です。家にダグラス・ホフスタッター著『ゲーデル、エッシャー、バッハ』というぶ厚い本がありました。そのころまでに、バッハという作曲家は、フーガ　ト短調や二声のインヴェンションのいくつかを習っていて、その非常に緻密な構造の音楽に圧倒されるような思いで接しており、その本に興味を持ちました。エッシャーの絵も子供向けの本で知っていました。ゲーデルという名前は知りませんでしたが、読み始めました。非常におもしろい本でした。章と章のあいだに配置された、アキレスや亀、蟹などが出てくる会話は、バッハのフーガやカノンを模していておもしろく、本文は難しかったですが、全体的に非常におもしろく読んでいました。いまから１、２年ほど前に、私の数学教室でこういった内容を学ばれた方があったため、久しぶりに図書館で借りて読み返しましたが、非常に饒舌に書かれた本でした。（教科書風なのではなく、「科学読み物風」の書だといえます。そういう本はときどきブルーバックス等でもあったものです。）私はこの本を読み、当時、ゲーデルの不完全性定理の主張するところ、および証明の概略は、理解していたことになります。それは、ずっと後、大学院の修士課程を修了するころ、教会で知り合ったある数学を専門とする男性との会話で確認できました。その方は修士課程を修了して企業に勤めておられ、そのころ、数学基礎論の研究をされていたのでした。食事をしながら話し、私が「ゲーデルの不完全性定理の主張は、あたかも無限生成の群が、有限個の生

成元をいくら並べても生成し得ないようなものか（公理をいくら並べても、真なる命題のすべてが生成し得ない）」と聞いて、だいたいそうだと言われたことで確認できました。このことをだいぶ饒舌に、いろいろおもしろい話題を取り入れつつ、語った本なのでした。

当時、家には旧式のパソコンがありました。インターネット等のある前の時代です。BASIC を覚えてプログラミングにはまりました。中高 6 年間で、およそプログラミングできそうなものは大概やったと思います。この本に出て来た命題で、「4 以上の偶数は、2 つの素数の和でかける」というものがありました。4=2+2、6=3+3、8=3+5、そして 10 は 3+7 とも 5+5 とも書けます。この命題は、この本の時点で、真とも偽とも言えない命題でした。真だと証明した人もおらず、反例をあげた人もいないようなのです。（現代でも未解決問題であるようです。ゴールドバッハ予想と言います。こういうとき、バッハの鍵盤曲「ゴールドベルク変奏曲」と並べて語呂合わせをするような仕掛けのたくさんある本でした。）著者としては、これは、自然数にかんする命題で、真か偽かは決まるようなものでありながら、真とも偽とも言えていないようなもの、という意味で出しておられるのは分かりましたが、私は少し別の興味も持ちました。この命題を、小さな偶数から確かめ、反例があったらとまるプログラムは書けることです。そういうのは書いてみました。当時のパソコンは遅かったですが（高校のころ書いたテトリスは遅くて実用的には遊べませんでした）、このようなプログラムが

世界のどこかで走っているのだろうなあと思ったものです。

後日談を少し書きます。いまから 10 年前、2016 年度に、私は勤めていた学校で 1 年間、情報科の実習助手をやらされました。（教員としてあまりにも使い物にならなかったからです。）その 3 学期のプログラミングの授業で、私はこのときのプログラムを再び書きました。中学のときの自分に、四十代にして追いついた気分がしました。当時の高校二年生でこのプログラムが書ける人はおらず、これよりずっと簡単な、与えられた数以下の素数をすべて出力するプログラムを書いた生徒さんは、京大に受かったそうです。そのまた後日談ですが、数年前、仕事を長く休み、就労移行支援事業所という、仕事を失った障害者のための施設で、（そこは事務員として最低限のワードやエクセルのスキルを学ぶところでしたが、）エクセルのマクロを覚えたとき、みたびこのプログラムを書きました。走らせた様子を以下にはります。このあたり（1000 付近）だといかにも成り立ちそうな予想ではありますね。

490	982=5+977
491	984=7+977
492	986=3+983
493	988=5+983
494	990=7+983
495	992=73+919
496	994=3+991
497	996=5+991
498	998=7+991
499	1000=3+997
500	1002=5+997
501	1004=7+997
502	1006=23+983
503	1008=11+997
504	1010=13+997
505	1012=3+1009
506	1014=5+1009
507	1016=3+1013
508	1018=5+1013
509	1020=7+1013
510	1022=3+1019

この本は、高校に入ってからも読み返していたようです。中学のとき、どうしてもわからなかった複雑な記号の操作が、じつは数学的帰納法を表していることに気が付き、どうして中学のときはこれがわからなかったのだろう、と思った記憶があります。（高校２年のとき、紙で作った枠に、$n=k$、$n=k+1$、と書いて、黒板で一生懸命数学的帰納法の説明する先生を見て、先生、そこまでしなくても分かりますから、という思いで授業を聴いたことを思い出します。）ホフスタッターさんが、虚数単位のiについて、iと$-i$は区別がないことに触れ「われわれはずっと間違ったほうをiと呼んできたのかもしれないのである！」と書いているのを読み「なるほどそうか！」と思った記憶

もあります。証明が終わりに近づくとき、どう証明終わりになるか予測できても最後まで証明を読みたい気持ちを、知っている音楽がどう終わるか知っていても最後まで聴きたい気持ちになぞらえてあるのを読んでなるほどと思ったりしました。大学に入って教養で記号論理学を学び、中学のときに読んだこの本の、だいぶ初歩が出て来て「『ゲーデル、エッシャー、バッハ』ではないか」と思った記憶もあります。

こう書いて参りますと、中学生でゲーデルの不完全性定理の主張および証明の骨子を理解しているとはだいぶ早熟な気がしますが、私は数学基礎論のほうへ進みませんでした。トポロジーへ進んだわけです。それで間違っていませんでした。また、当時は現代のような IT の時代ではなく、プログラマという仕事もありませんでしたが、私はその方面へも行っていないわけです（現実的には私はだいぶパソコンおんちです）。振り返ってみて、やはりこの本はあくまで青少年向け科学読み物で、私が向いているのはトポロジーなのでした。高校のとき理系を選び、大学で数学科を選び、とても悩みながらも、トポロジーの道を選んで来たのは、数学が好きとか嫌いとかではなく、ひとえに自分の向いているほうの道を選んだのでした。博士課程 1 年で、大きな病気をして数学の道から脱落するまで、折々に自分の来た道を振り返り、そのたび、自分の来た道は間違いではなかった、と思ったものです。

この本は、後半は著者の専門である人工知能の話へ向かい、チューリングマシンなどが出て来ます。とうていこの本のすべては読めなかった私が、不明な話題へ向かうわ

けです。現代は AI（人工知能）の時代ですが、私は、いわゆるコンピュータ的な脳はしていないらしい、と気づく日々でもあります。最近、図書館での本の乱読のなかで、河東泰之『数学者の思案』という本を読みました。河東先生は私が学生のころから東大数理の先生である高名な先生ですが、河東先生によりますと、数学者としての、論理・計算の能力と、新しいことを思いつくような能力は、かなり相関がないそうです（たくさんの世界の数学者を長いことご覧になっている先生のご意見であるわけですが、もしかしたら数学の先生の共通認識なのかもしれません)。どうも私は学生時代から自分が鈍だと感じています。現在、自分とは何者かという問いの前で考える毎日を送っています。少なくとも私の頭はチューリングマシンのようではないと感じる日々です。

第１７章　４次元における立方体

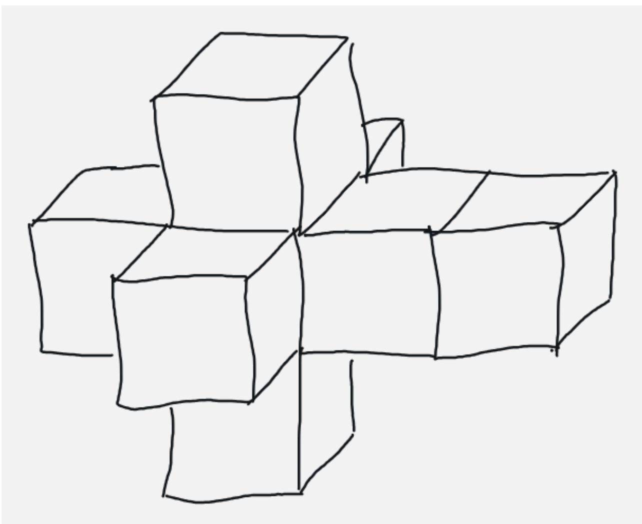
いつごろから「4 次元」というものについて考えていたでしょうか。当時はインターネットがなく、現代のようにたくさんの情報が飛び交うような時代ではありませんでした。おそらく、子供向けの科学読み物のようなものに、ややあやしいような感じで、「４次元」について書いてあったのだと思います。「ドラえもん」のアニメは、小学校に上がる前から 10 チャンネル（テレビ朝日）で放送されていて、見ていましたの

で、「四次元ポケット」という言葉は知っていたことになります。その「4次元」というものは、たて、よこ、高さ以外のもう1つの方向があるということだというのが、いろいろな書物に、そういう世界は実際にはないけれどもというような、ファンタジックな感じで書いてあったのだろうと思います。

先ほど、動物図鑑が家にあったと書きました。同じように、魚の図鑑、鳥の図鑑、昆虫図鑑などもあり、よく読みました。『数・形』という図鑑もありました。これは、どうも読んでありがたくない気分になる図鑑でした。いま考えると、これも子供向け科学読み物の一つで、小学生くらいの子供に、数学の内容を、先取りでいろいろ教えようとするものだったわけです。例えば、以下のような内容が書いてありました。小学生だったガウスの担任の先生が、あるとき算数の授業で、1から100までの数を足しなさいという課題を出したのだそうです。ほとんどの子供は、1から順に足していったそうですが、ガウスだけ、ノートに「5050」とだけ書いていたそうです。先生がたずねるとガウスは「1と100を足すと101になります。2と99を足すと101になります。3と98を足すと101になります。このように、101が50個できるので、101×50で、5050です」と答えたのだそうです。有名な話かもしれません。私はこれを読んだとき、なんとも言えない気持ちになりました。途方もない屁理屈に思えたのです。

「5050」という計算結果も、いかにも不自然な気がしましたが、かといって自分で 1 から順に 100 まで足して確かめようという気にはなりませんでした。5050 とだけノートに書いて、そうなる根拠を書いていなかったガウスの態度にもあまりいい感じを受けなかったことも覚えています（ガウスの態度はその図鑑の記述によります）。この図鑑で、統計に関するおもしろい記事がひとつあったことは覚えていますが、それ以外はあまりありがたくない書物でした。いま考えますと、数学についての盛大な「ネタバラシの書」だったからでしょう。

この本に、４次元のことについて、書いてありました。詳細は覚えていませんが、４次元の立方体について、以下のような展開図が書いてありました。



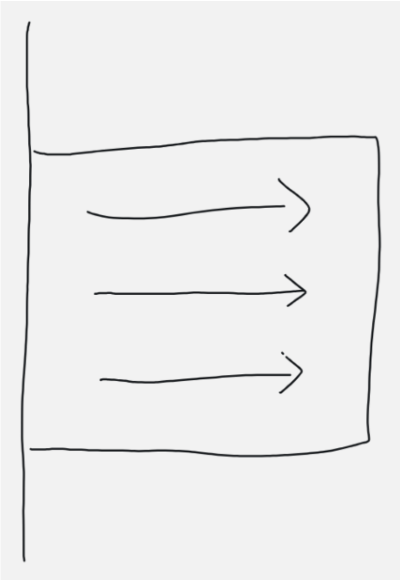
そして、その４次元の立方体そのものについては、４次元だから図はかけない、と書いてありました。いま考えますと、これがかいてなかったことは幸いでした。以下の

ように、自分で考えることができたからです。

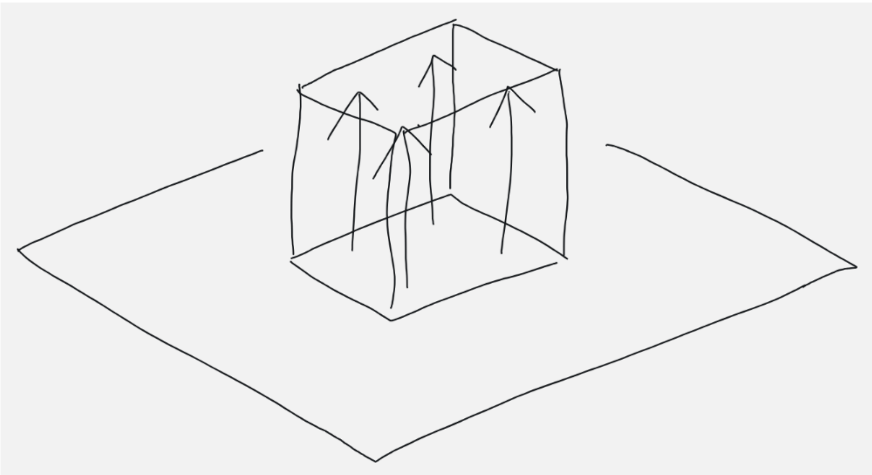
中学生であったときのことです。4 次元の立方体について、漠然と考えていたことがあります。どれくらい考えたでしょうか。当時、吹奏楽部に入ってフルートを吹いていましたが、フルートの先生のお宅のある、家から歩いて 1 時間くらいの、林のある風景をなんとなく思い出します。そういうところを歩きながら、考えていたのでしょう。以下のことに気づいたときのことは、鮮明に覚えています。

点をある方向に動かすと、線分ができます。

線分を、その線分を含む直線と違う方向（垂直な方向）へ動かすと、正方形ができます。

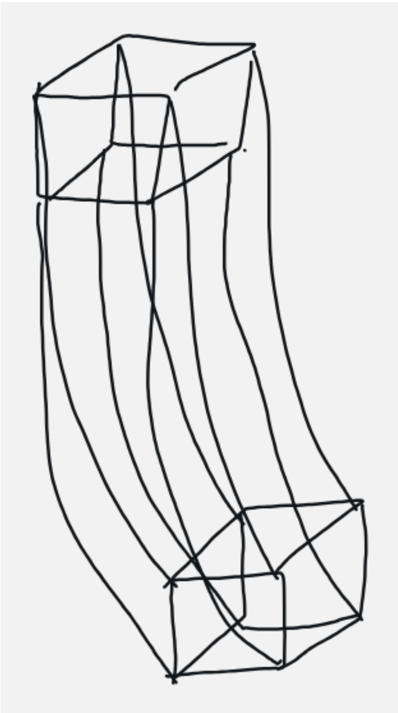


正方形を、その正方形を含む平面と違う方向（垂直な方向）へ動かすと、立方体ができます。



そうすると、立方体を、その立方体を含む３次元の空間と違う方向（垂直な方向）に動かしてできる４次元の図形があるではないか！と気づいたのです。

これに気づき「わかった！わかった！」と心の中で言いながら家に帰って夢中でかいた絵は、以下のようなものでした。立方体が別の方向に動いています。



この図形の頂点の個数は数えられます。上の立方体に 8 個、下の立方体に 8 個で、16 個です。

この図形の辺の数も数えられます。上の立方体に 12 本、下の立方体にも 12 本、立方体の 8 個の頂点が動いてできる辺が 8 本、あわせて、12+12+8=32 で、32 本です。

この図形には、いくつかの正方形があることも分かります。正方形の数は以下のように数えられます。上の立方体に 6 枚、下の立方体にも 6 枚、立方体の 12 本の辺が動いてできる正方形が 12 枚、あわせて、6+6+12=24 で、24 枚です。

この図形は、いくつかの立方体でできていました。上の立方体が 1 つ、下の立方体も 1 つ、立方体の 6 つの面が動いてできる立方体が 6 つで、1+1+6=8 で、8 個です。

図鑑にあった、この図形の展開図が、立方体８つからできていることも説明できました。

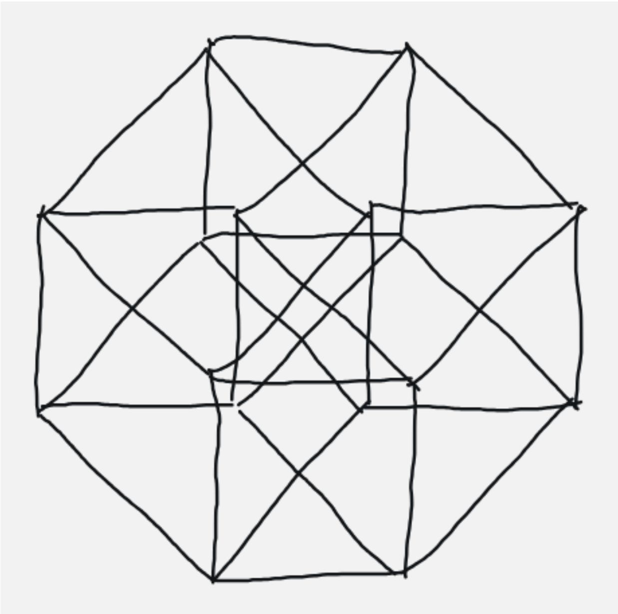
この、「４次元というものは、本によると、あるのかないのかわからないファンタジックなものに思えるけれども、よく考えるとあるのだ」というところに興奮させられていたと思います。たとえば、この図形の頂点の数は、16 個であると決まっています。辺の数は 32 本でした。よく考えるとある証拠に、これらの数は定まっているのです。図鑑には、この図形の絵はかけないと書いてありましたが、かけるわけです。

２次元の平面を切った「切り口」は１次元の直線であり、３次元の図形を切った「切り口」は２次元の図形であることを考えると、４次元の図形を切った切り口は３次元の図形になります。また、先ほどの図形は、３次元の図形である立方体８個に囲まれていて、展開図は３次元の図形でした。これらのことは、直感を裏切っていていかにも妙ですが、考えれば考えるほど、このように考えることが自然なのでした。

このようにして、私は、４次元のことをしばらく考えるようになりました。これらは大学に入って体系的にもろもろのことを習うまで、自分で考えるよりなかったことです。（周囲の大人、先生、級友に言っても分かってもらえなかったことです。）

この図形の形ですが、のちに頭を整理させて、以下の図のように描くようになりました。立方体を２次元の紙に描くときの標準的な描き方では、「たて」「よこ」以外の３

番目の方向は、右肩上がりの斜めで描くので、もう１つの方向は、右肩下がりの斜めで描くのがいいのだろうということに気づいたからです。



高校１年のとき、この図形について、数学の先生に言ったことがあったと思います。先生はあるとき、君の描いた通りだもんなあ、と言いながら、本で見つけたという上の図と同じ図を見せてくださいました。私は、自分のように考えれば、この図に行きつくのは当然なので驚かなかったのですが、先生は、いろいろ調べて、本に私の描いた図と同じものが出て来たので、驚かれたのだと思います。

高校２年の冬のことだと思いますが、中学のころから考えた４次元のことなどについて、レポートにまとめる機会がありました。高校（栃木県立宇都宮高等学校）での「自由研究」という、自分で調べたり考えたりしたことをまとめる企画に提出したのです。（金賞をいただくことができました。その時点での過去 10 年間の金賞受賞者が

発表されていましたが、理系の研究で金賞をもらった人は過去 10 年で私以外にいませんでした。）そのときまでに、４次元における正多面体に相当する図形について、いろいろ考えていましたが、それらを表現する言葉がなく、自分で編み出すよりありませんでした。そこで「正多体塊」と表現しました。正多面体は、いくつかの面に囲まれた体という意味なので、いくつかの体に囲まれたかたまりという意味で、そのように呼ぶことにしたわけです。この文書では、この言い方をさせていただきたいと思います。今回の図形は「正八体塊」と呼ぶことになります。

（先ほど、その『数・形』という図鑑が、この図形についてネタバラシをしていなくてよかったと書きましたが、それを現在の私は、こうしてインターネットでネタバラシしています。現代の若い人に申し訳ないような気が少しだけします。）

第１８章　４次元における２直線の位置関係

前の章で、中学のとき、４次元のことについて考えていたことを書きました。同じく中学生だったあるとき、以下のことを考えました。

平面上で、２直線の位置関係は

（１）ぴったり重なる

（２）１点で交わる

（３）平行

の３種類があり得ます。３次元の空間では、これに

（４）ねじれの位置

が加わるわけです。４次元の空間では、これに何が加わるであろうか。私は、「ハイパーねじれの位置」のようなものが加わるのだろうと漠然と想像していました。どのくらい考えたでしょうか。１か月くらい考えた気がします。あるとき気が付きました。「もう増えない」のです！２直線の位置関係は、５次元に行っても、６次元に行っても、上に述べた（1）から（4）までの位置関係しかあり得ないのでした。予想を裏切られたので驚きました。

直線は異なる２点で決まっています。すなわち、異なる２点を通る直線は１つ存在し、１つしか存在しません。これは平面上でも３次元の空間内でも同様です。また、１直線上にない３点を通る平面は１つだけ存在します。同様に考えますと、同一平面上にない４点は、ある３次元空間を定めています。

ここまで見ましたように、直線は２点で決まっていますので、２直線は４点で決まっています。とくに、ねじれの位置にある２直線は、同一平面上にない４点が定めています。そして、同一平面上にない４点を通る３次元空間は１つ存在するので、２直線

は必ずある３次元空間に含まれていることになります。すなわち、４次元に行っても５次元に行っても、２直線は常にある３次元空間に含まれているので、３次元空間であり得た位置関係以上の位置関係はあり得ないのです。

これは当時、誰かに話したでしょうか。話しても通じない話だったと思います。高校や大学で話したでしょうか。大学以降は「一般の位置」という言葉を習い、これは常識の部類となりました。ここ数年、この算数・数学教室をやっていますが、言えば通じる方と、言っても通じない方がおられます。先月（2025 年 11 月）、X で東北大の長谷川浩司先生にこのときのことを話したところ、長谷川先生は、以下のように書かれました（再掲）。

　お書き頂いたエピソードから、先生が数学における創造性を早くからお持ちだったのは間違いないかと思います。

　ｎ次元錐の体積やねじれの位置など、問を立てることすらなかなか初学者では辿りつかないものだと思います。問を立てる能力こそ研究には必要なこと、そのためには数学的自然についての感覚が必要なことなど、先生も御承知かと思いますが、教えられる以前に概ね理解されていたのではないでしょうか。

　発見法的な方法で教育もできれば、学習者にとっても興味深いものとなり、印象にも残ることで長く有意義だろうと思う一方、時間を読みにくく学校という枠で実現

することは中々大変かなとも思います。そのような葛藤で先生も苦しまれたのではないでしょうか。

修士論文の内容を世に出すことをお考えとのこと、有意義であり引用されるべき場面も末永くあるのではと思いますし、実はそれ以前に子供時代からいろんな段階でご自身が問われお気づきになった事実のいろいろについても、できればまとめていただけると大変面白く貴重な読み物になるかもしれません。(X、2025 年 11 月 7 日)

長谷川先生のアイデアで、この「自伝風の読み物」の執筆を始めたわけですが、確かに、この「４次元においては、２直線の位置関係はいかなるものが増えるか」という問いは、自分で発したという人に、自分以外で出会わないものです。

同じように考えると、平面と直線は、４次元空間でねじれの位置が起き、それは５次元空間に行っても増えないこと、平面と平面は４次元空間で１点で交わることが起き、５次元空間でねじれの位置が起きることなどが分かります。３次元の空間と３次元の空間が平面で交わる様子をおもしろく思い浮かべていたことを思い出します。

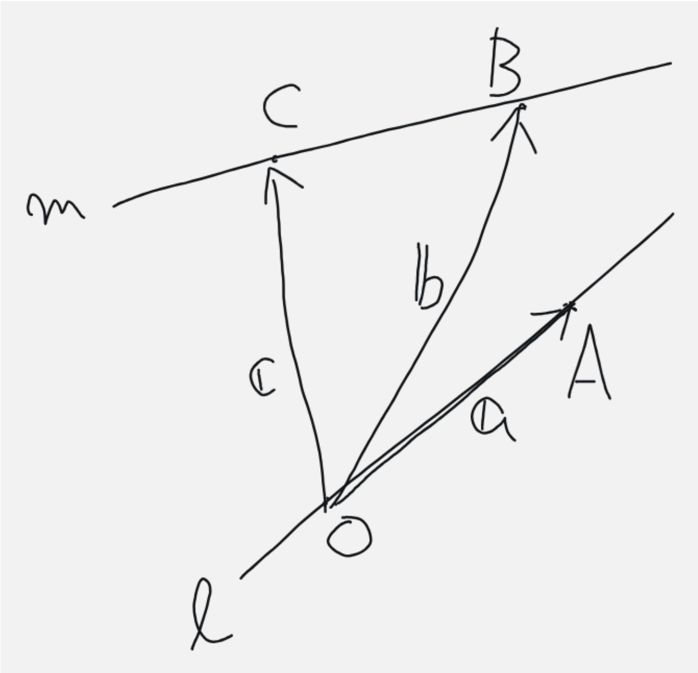
付け足しますと、１次元空間における点と点の位置関係は、（１）重なる、（２）離れている、の２種類しかありませんが、これは２次元空間でも３次元空間でも増えません。点と点が離れているのは点と点の「ねじれの位置」と言えるでしょう。同様に、

平面上における点と直線の位置関係は、（１）点が直線に含まれている、（２）点と直線が離れている、の２種がありますが、これも３次元空間に行っても増えず、点と直線が離れているのは、点と直線のねじれの位置と言えます。

第１８章への長い付け足し　４次元における２直線の位置関係について、線形代数の知識を仮定して説明する

先ほどの第１８章で、私は中学のときに以下のことに気づいたと書きました。２直線の位置関係は、平面上では（１）ぴったり重なる、（２）１点で交わる、（３）平行、の３種類がある。３次元空間では、これらに加え（４）ねじれの位置、がある。４次元に行くと、どういう位置関係が増えるであろうかと思い、しばらく考えて「もう増えない」という結論に達したのです。予想を裏切られたので驚きました。この発見について、のちに人に話しても、なかなか通じないという経験をして参りました。しかしこのことについては線形代数の初歩的な知識があれば説明できます。以下は番外編として、そのご説明をいたします。

４次元の空間に、２直線l、mがあるとします。l上に２点 O、A をとり、m上に２点 B、C をとります。４点 O、A、B、C はすべて異なる点とします。点 O を始点とする位置ベクトルを考えます。A、B、C の位置ベクトルをそれぞれ$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$とします。



すると、l上の点はすべて、aの実数倍で書けます。そして、m上の点はすべて、bとcの線形結合で書けます。すなわち、２直線l、m上の点はすべて、a、b、cの線形結合で書けます。ここで、a、b、cが生成する部分空間をＶとしますと、lとmはＶに含まれています。そして、a、b、cが線形独立のときＶの次元は３であり、そうでないときＶの次元は２以下です。つまり、２直線l、mは常に３次元以下の空間に含まれているため、２直線の位置関係は、3次元までであり得たものしかあり得ないのです。

a、b、cが線形独立であることと、lとmがねじれの位置にあることは同値です。２次元でねじれの位置は起きないからです。

これで通じますでしょうか。私は三十代のときに中高の教員をやり、中高の数学は嫌というほど振り返りましたが、大学の数学を振り返った経験はなく、線形代数は学生

時代に習ったきりであり、このたび学生時代の教科書を読みながら以上の証明を書きました。

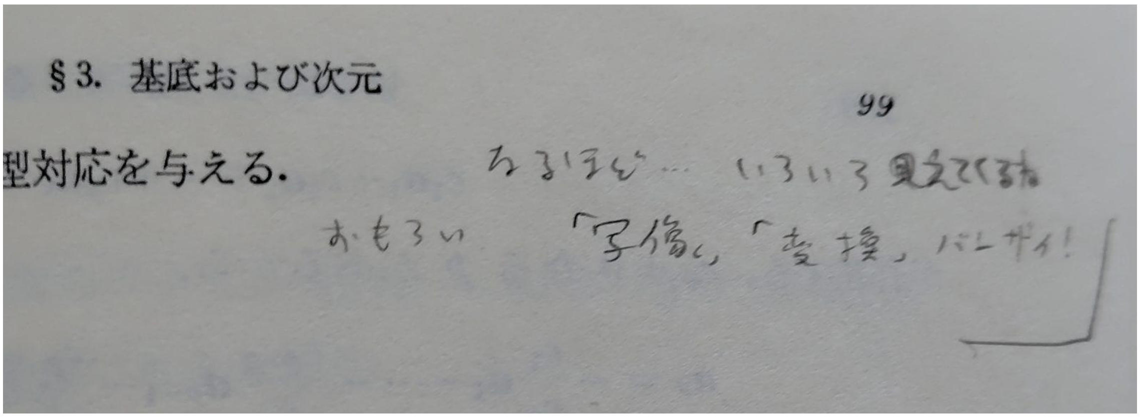
その記事（第１８章）をお読みくださった長谷川先生は以下のように書かれました。

> やはり中学で 4 次元について考え、正しく推論できるというのは凄いと思います。本来こういう話から線形代数もやるべきかもしれませんし、いわゆるシューベルトカルキュラスなどにも入り口になると思いました。（X、2025 年 12 月 13 日）

ありがたいことです。シューベルトカルキュラスはインターネットで見ると難しそうで分かりませんが、確かにこれは線形代数なので、本日の記事を書いてみた次第でした。

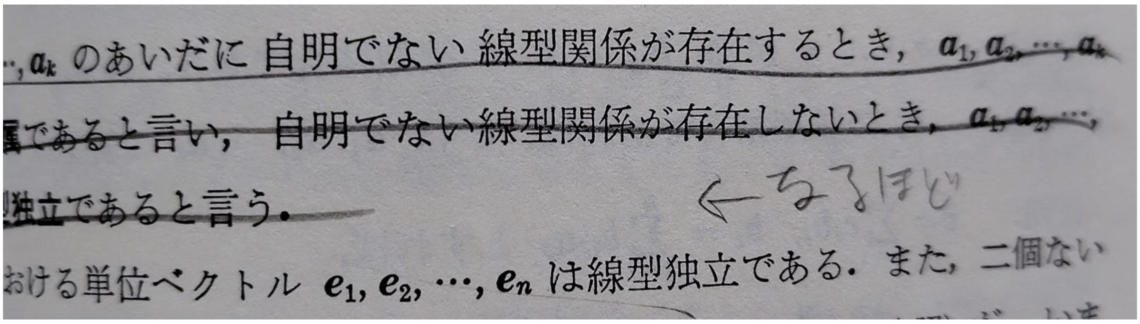
余談ついでなので以下の話を書きます。このたびの病気で仕事を休み、なかなか普段、勉強できないことを復習する機会だと思い、線形代数や、集合と位相などの教科書を読み返しています。線形代数は、佐武一郎『線型代数学』、斎藤正彦『線型代数入門』で学び直しています。前者は新しく買い、後者は 32 年前、18 歳で使った教科書です。このたび線形空間の復習をして、32 年ぶりに後者を読み返し、以下の書き込みを見つけました。

「なるほど・・・いろいろ見えてくるね　おもろい　「写像」「変換」バンザイ！」



つまり、自分が中学のころ考えていたことが、ようやく体系だって説明され始めたので、このように書いているのでしょう。「写像」という言葉を生まれて初めて聞いた日かもしれません。「おもろい」という関西風の表現について当時を思い出しますと、この前の年まで私は地元の高校におり、この年から東京に住み、いきなりクラスメイトが全国区となり、クラスにはさまざまな地方の方言が飛びかっていたという状況だったと思うのです。

そのページの下のほう、「(k個のベクトル)$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{k}}$のあいだに自明でない線型関係が存在するとき、$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{k}}$は線型従属であると言い、自明でない線型関係が存在しないとき、$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{k}}$は線型独立であると言う」というところに下線を引いて、大きく「←なるほど」と書いていますが、これも、高校までに習った線型独立の定義(2つのベクトルであれば、0 ベクトルでなく平行でないこと)がたくみに一般化されているのを見て(というか、ここで習ったことの高校生向けの特殊化が高校で習ったことだと知って)「なるほど」と書いているのです。



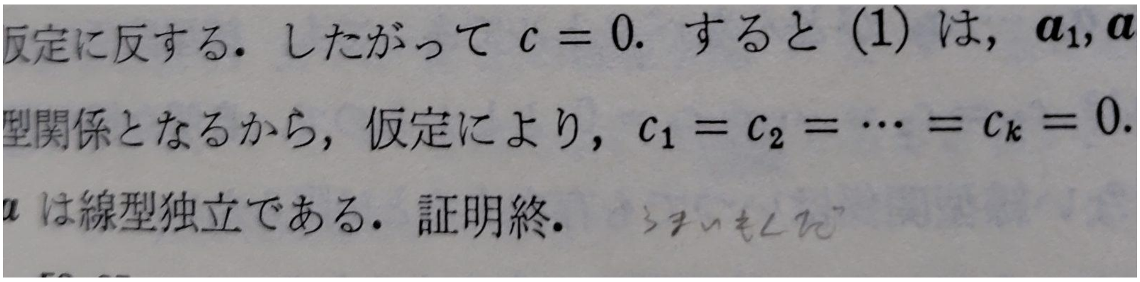
…, a_k のあいだに自明でない線型関係が存在するとき，$a_1, a_2, \cdots, a_k$

であると言い，自明でない線型関係が存在しないとき，$a_1, a_2, \cdots,$

独立であると言う．　←なるほど

おける単位ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_n$ は線型独立である．また，二個ない

このほか、次のページで、「$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{k}$が線型独立であり、aが$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{k}$の線型結合として表わされないならば、$k+1$個のベクトル$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{k}, \mathrm{a}$も線型独立である」ということを著者の斎藤先生が数行で証明してしまっているのを見て舌を巻き、小さい字で「うまいもんだ」と書き込んでいます。



仮定に反する．したがって $c=0$. すると (1) は，a_1, a

型関係となるから，仮定により，$c_1=c_2=\cdots=c_k=0$.

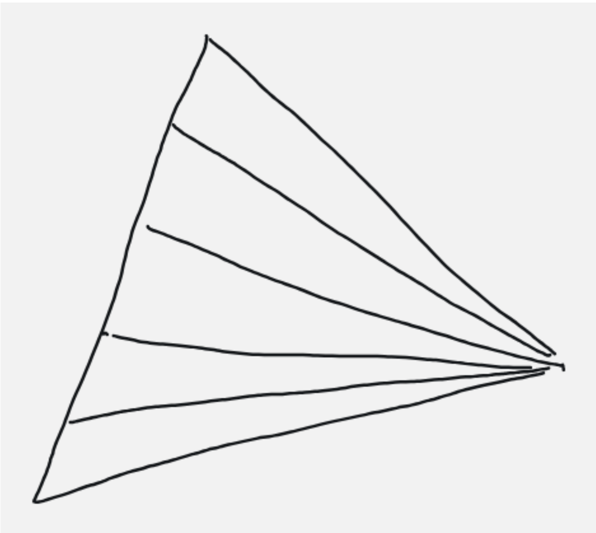
a は線型独立である．証明終．　うまいもんだ

昔の懐かし話はこのへんにしておきます。線形代数もだいぶ忘れていますので、マイペースで復習したいです。

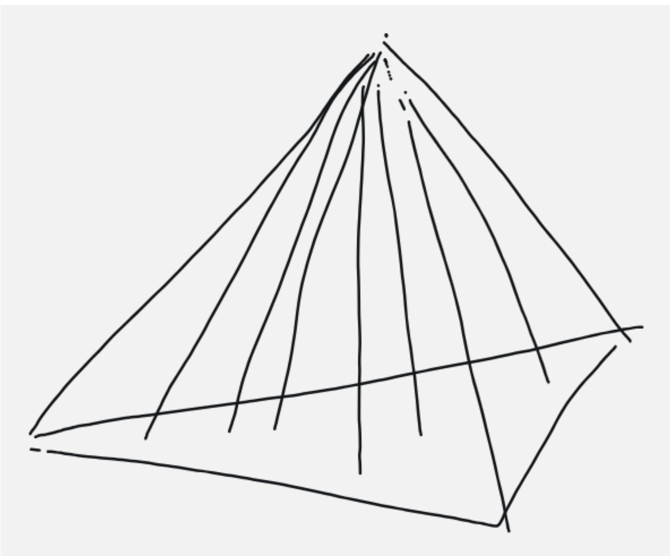
第１９章　４次元における正四面体に相当するもの

このあと、私は、４次元における正多面体に相当するものをいろいろ考えました。以下のようなことに気づいた日がありました。

正三角形は、線分があり、その線分を含む直線上にないある 1 点から、その線分上のすべての点を結んで得られる図形であると考えられます。



同じように、正四面体とは、正三角形があり、その正三角形を含む平面上にないある 1 点から、その正三角形上にあるすべての点を結んで得られる図形であると考えられるわけです。



同じように考えれば、正四面体があり、その正四面体を含む3次元空間上にないある1点から、その正四面体上にあるすべての点を結んで得られる正多体塊があるではないか。ということに気づいたのです。

（これに気づいたときは、正八体塊を発見したときや、2直線の位置関係は3次元空間であり得たもの以外に4次元では増えないことに気づいたときのような大きな衝撃はありませんでした。だいぶ4次元についてはいろいろ見えてきており、とくに「一般の位置にある何点」というような発想はあったため、今回の発見は、よく考えれば気づく、というものだったからでしょう。）

この図形は、底体（底辺とか底面という言い方からすると底体というのでしょう）の正四面体に4つの頂点があり、あと1つ頂点があるので、4+1=5で、5個の頂点があります。底体に辺は6本あり、そのほか、底体の4つの頂点と、てっぺんの頂点を結んだ4つの辺があるので、6+4=10で、辺は10本です。底体に面は4枚あり、そのほか、底体の6つの辺と、てっぺんの頂点を結んだ6つの面があるので、4+6=10で、面は10枚です。底体に体は1つですが、底体の4つの面と、てっぺんの頂点を結んだ体が4つあるため、1+4=5で、体は5個です。この図形は、正五体塊と呼ばれるべきものです。

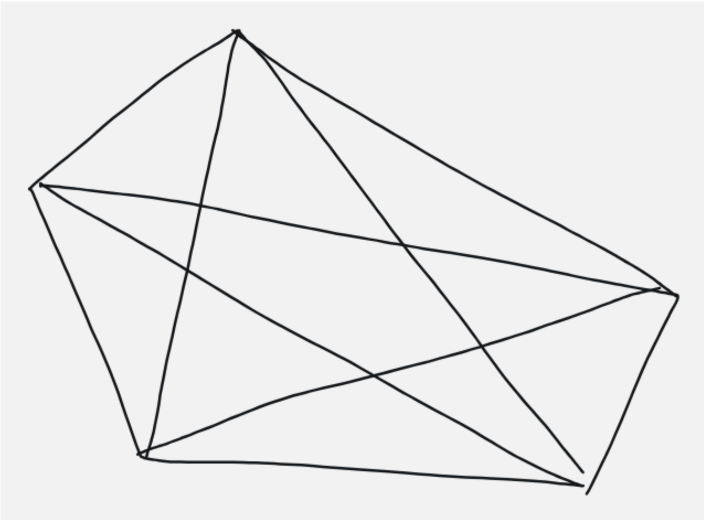
ここから分かることがあります。「正四角形→正六面体→正八体塊」のシリーズは何次

元に行っても存在し、「正三角形→正四面体→正五体塊」のシリーズも、何次元に行っても存在するため、何次元に行っても、この正多面体というものは、少なくとも２種は存在するということでした。

正五体塊の展開図も考えました。１つの正四面体の４つの面に、１つずつ、４つの正四面体がくっついた３次元の図形となるのでした。

ずっとのち、大学生になって、このような図形は、単体ということを習いました（ただし単体は各辺が同じ長さでなければならないという条件はありませんが)。

おそらく修士課程１年のとき、学部３年生のホモロジーの授業の TA をした際のことだと思います。演習の採点が仕事でしたが、授業を聴かないと採点できないと思い、ときどき授業に出ました。松本幸夫先生が、単体を教えるとき、「３次元の図形も２次元の紙にかくでしょう。４次元の図形も２次元の紙にかけますよ」と言いながら、以下のように黒板に４単体の絵をかかれました。



本日は、正多体塊として、正五体塊を見つけたときの話でした。

第２０章　三角形の合同条件

中学生のときに、「証明」というものを習いました。当たり前と思えることから始めて、その性質が成り立つ理由を述べるものでした。対頂角が等しい証明などを習いました。現代の中学生も２年生で習います。三角形の合同条件（２つの三角形は、３辺の長さがそれぞれ等しいとき合同である等）は認めて進むのでした。私は、「これはなかなか論理的でおもしろいが、三角形の合同条件そのものは証明しないんだね」と思って先生の説明を聞いていました。(自分もそう思っていたという人には会わない気がして、この短い記事を書いてみました。皆さんおっしゃらないだけなのでしょうか。もちろん三角形の合同条件に納得できなかったのではなく、それ以外の議論は当たり前と思えるようなところまでするのに、三角形の合同条件３つは認めて進むのだなあ

と思ったということです。かといって自力で数学の教科書の論理の構成を書き換えることができるかと言ってもできそうにありませんし、やはりこれは三角形の合同条件は認めた上で、その後の論理の積み重なりを楽しむものなのか・・・と思って先生のお話を聞いていたわけです。）本日の記事は以上です。

第２１章　円の方程式

前に少し触れましたが、私が中学生のころ、家に旧式のパソコンがありました。インターネットやメールの存在しないころの話です。BASIC の初歩を覚えた私は、プログラミングにハマりました。中高６年間で、およそプログラミングできることは、したと思います。あるとき、画面に円を描いてみたくなりました。パソコンの画面は、xy座標平面のようであったと思います。私はそのころ、円の方程式は習っていませんでした。三平方の定理は習って知っていました。そこで、よく考えた末、以下のようにyをxの式で表してパソコンに円を描いたのでした。（当時の notation は忘れております。あとから円の方程式を習い、記憶に上書きがなされましたので。）

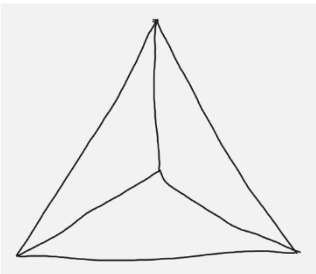
$$\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{x}^2}$$
$$\mathrm{y} = -\sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{x}^2}$$

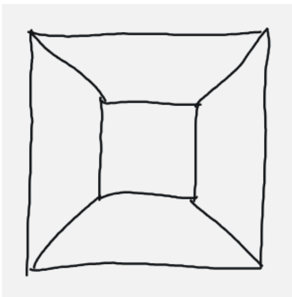
円の方程式を習う前から気が付いていたという人は、自分以外に知らないものです。

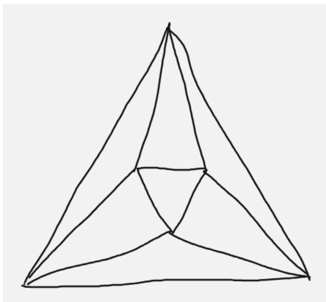
第２２章　４次元における正多面体に相当するもの

中学のころ、４次元のことについて考えていたと書きました。ここまで、４次元における正多面体に相当するものは、正八体塊と、正五体塊があることが分かっていました。それ以外に正多体塊はどういうものがあるだろうかという問いは、長く私の中にありました。あるとき、以下のような図を見ました。正多面体を平面上にかく方法の一種でした。

正四面体　　　　　　正六面体　　　　　　正八面体







同様にして正十二面体、正二十面体の図もあります。正多面体を平面上にかいています。正六面体でいえば、正方形（四角形）が５つあり、いちばん外側の正方形が６枚目なのでした。中央に１つ正方形をかき、１つの頂点に３つずつ正方形（四角形）が集まるようにかいていけば、おのずと正六面体が平面上にかけるのでした。このかき方で１つ次元を上げれば、つまり、３次元の空間に正多面体を埋め尽くすようにかけ

ば、すべての正多体塊はかけるではないか。そのように思い、高校 1 年のときの夏休み、これをかいていました。近所の（と言っても田舎なので徒歩 30 分くらいの）文房具屋さんで模造紙を買い、自分の勉強部屋の床に敷き、ひたすら線をかいたのです。ここに正四面体がいくつ集まったから、つぎはここに線を引いて・・・というふうに、かいていきました。原理的にこの方法ですべての正多体塊はかけるはずです。正多体塊は全部で何種類あるのかもわかるはずです。しかし、いくら線を引いても収拾がつかず、ついに新しい正多体塊は見つかりませんでした。

別のときの話になります。あるプリントを見たのです。本のあるページのコピーだったかもしれません。私が 4 次元における正多面体を考えていることを知った大人が見せてくれたものだったかと思います。正六面体の 6 つの面のそれぞれ真ん中の点（6 つ）を頂点とする正多面体があり、それは正八面体であること、このような操作がすべての正多面体でできることが図示されたプリントでした。これは、私は以下のようにとらえました。正六面体の 2-skeleton をS^2と見なし、その双対グラフを考えると、正八面体の 2-skeleton となるわけです。したがって、正六面体の頂点の数と正八面体の面の数は一致し（8 つ）、正六面体の辺の数と正八面体の辺の数は一致し（12 本。正六面体の頂点のつながり方と正八面体の面のつながり方は同じだから）、正六面体の面の数と正八面体の頂点の数は一致する（6 つ）わけです。これは、次元を 1 つ上げて考えることができます。たとえば、正八体塊で言いますと、各立方体の真ん中に頂点を

取り、隣接する立方体どうしの対応する頂点どうしを辺で結ぶわけです。すると、正八体塊の辺に、新しい図形の面が対応し（正八体塊は 1 つの辺に 3 つの立方体が集まるので、それは正三角形であるはずで）、正八体塊の頂点に、新しい図形の「体」（正八体塊は 1 つの頂点に 4 つの辺が集まっているのでそれは正四面体であるはず）が対応するはずです。正八体塊の頂点の数、辺の数、正方形の数、立方体の数はそれぞれ、16、32、24、8 ですので、ここで新しくできた図形は、頂点が 8 つ、辺が 24 本、正三角形が 32 枚、正四面体が 16 個からなる正多体塊です。これは正十六体塊と呼ばれるべきものです。ここまで考えは及びましたが、自分が当時、正十六体塊というものがはっきり「ある」と言えてはいなかったのではないかと思います。なぜなら、正十六体塊の図はかけなかったからです。これは誰か先生の出題した問いではなかったわけで、つまり、正十六体塊というものがあれば、こうなるはずですが、誰もこういう図形が「ある」と保証をしてくれず、そして、自分ではついに図がかけなかったので、この図形の存在については、conjecture というよりない状態、つまり「ほぼあると確信しているのだが証明ができない」という状態だったのだろうと思われます。（高校 2 年のときにまとめたレポートが出てくればはっきりしますが、残念ながらいまのところ出て来ません。高校に問い合わせてももうないそうです。）

これも高校 2 年のときにレポートにまとめることになりましたが、そのプリントに、「双対」という言葉の紹介はなく、私は、正六面体に対する正八面体の呼び方を編み

出さねばならず、これを「配偶正多面体」と呼びました。正六面体の配偶正多面体は、正八面体であり、正四面体の配偶正多面体は、正四面体自身です。当時「配偶者」という言葉は覚えたばかりだったかもしれませんが、配偶者の配偶者は自分自身であることからつけた名前です。

正五体塊の配偶正多体塊は、正五体塊自身です。また、正三角形の配偶正多角形は、正三角形自身です。一般に、正n角形の配偶正多角形は、正n角形自身であるわけです。

私は結局、すべての正多体塊の絵はかけませんでした。正多体塊は全部でいくつあるかも分からずじまいでした。先ほども述べましたが、これは、学校の先生の出題した問いではありません。学校の先生の出した問いなら、こちらの実力や、道具のそろい方などから加減がしてあるでしょうが、自分の立てた問いですから、難しすぎることはあります。

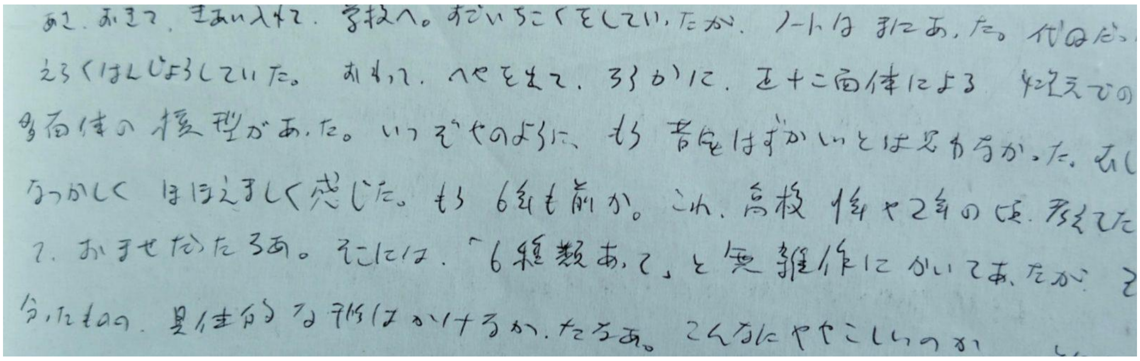
（すぐあとに述べる 98 年 1 月の日記の書きぶりからして、当時の私は、正多体塊は全部で 6 種類であることはだいたいわかっていたようです。これは要するに先ほども述べましたが「ほぼそうだと確信しているのだが証明ができない」という状態、つまり、conjecture の状態だったと思われます。）

少し後日談を書きます。高校を卒業してしばらくたちました。私は（学部生のときも

調子の悪い1年がありましたから2回目の）学部3年であった98年の1月、東大数理に、正多体塊の模型が登場したのです。アマチュアの数学者の方が作られたものだということでした。この記事の最初の考えに基づく、すなわち、4次元の正多体塊を3次元に展開した形の模型でした。正十二面体がたくさんで作られた模型は、直径が1メートルくらいある、全体が正十二面体でできた模型であり、非常に細かいものでした。私は高校1年の夏休み、こういうものを模造紙にかこうとしていたことになり、こんなに細かいものは道理でかけなかったわけだと思った次第でした。

このころ私は日記をつけており、それは残っています。日記から引用します。98年1月8日の日記です。

「(代数の授業が）おわって、へやを出て、ろうかに、正十二面体による4次元での多面体の模型があった。いつぞやのように、もう昔をはずかしいとは思わなかった。むしろ、なつかしく、ほほえましく感じた。もう6年も前か。これ、高校1年か2年の頃考えてたなんて、おませだったなあ。そこには、「6種類あって」と無雑作にかいてあったが、それは分ったものの、具体的な形はかけなかったなあ。こんなにややこしいのか。」


あさ．おきて．きあい入れて．学校へ。すでにちこくをしていったが．ノートはまにあった。代ゐだっ
えらくはんじょうしていた。おわって．へやをでて．ろうかに．正十二面体による 組えでの
多面体の模型があった。いつぞやのように、もう 昔ほどはずかしいとは思わなかった。むし
なつかしく ほほえましく感じた。もう 6年も前か。これ．高校1年や2年の頃．考えてた
て．おませだったろあ。そこには．「6種類あって」と無雑作にかいてあったが．そ
うったものの．具体的な形はかけるかったろあ。こんなにややこしいのか

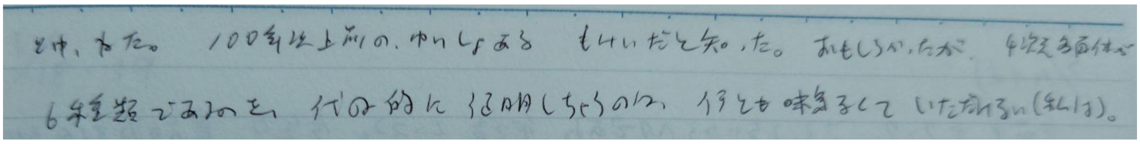
当時、６種類であることはなんとなくわかっていたようですが、具体的な形はかけなかったわけです。何年かかっても分からなかったことが、いきなり答えを見せられた形で、衝撃を受けたことと、高校のときを思い出し、恥ずかしさでいっぱいになった様子がうかがえます。

いまでも東大数理にこの模型はあるようです。東大数理のリンクをはります。

https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/models/polyhedra.html

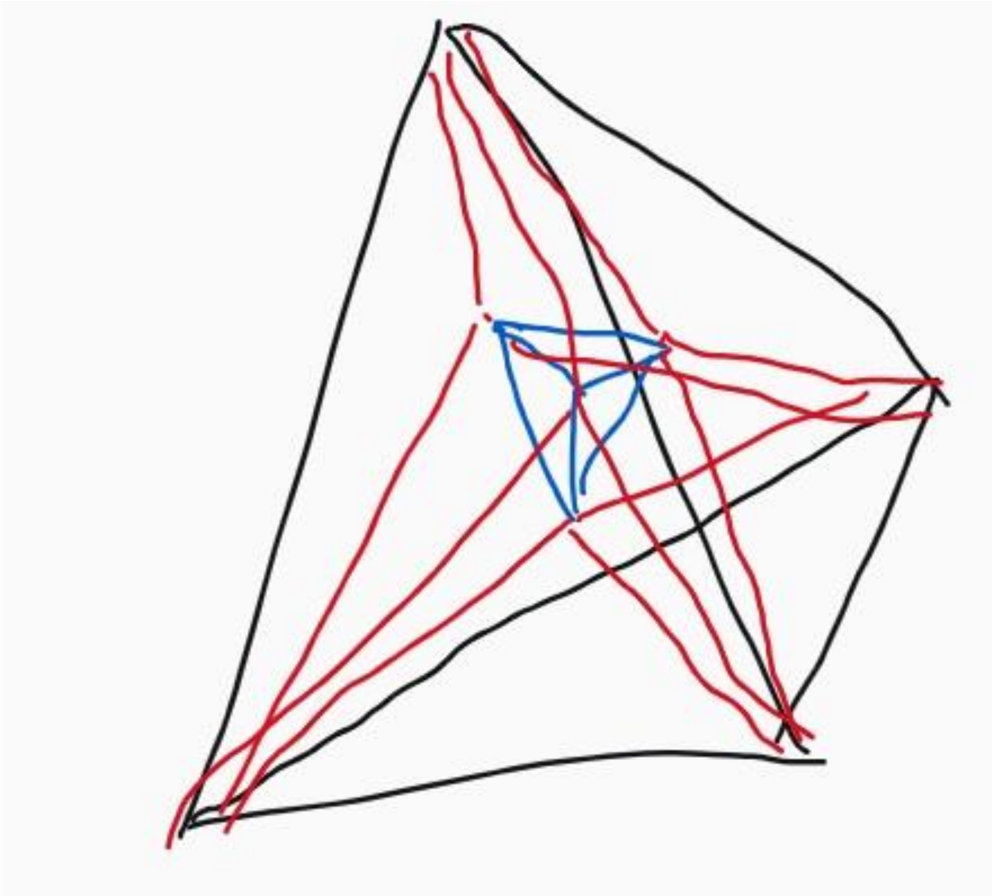
つぎの後日談です。同じ年の５月、私は学部４年でした。東大数理では当時、院試を迎える学部４年の夏学期、「概説」という授業が行われていました。１回の授業で２人の先生が、45 分ずつ、学部生向けにご自身の専門を語られるのでした。ある代数の先生が、その年の１月に登場した模型の話とからめて、正多体塊が６種類であることは、代数的に示せることをおっしゃったのです。私には身もふたもない証明であるように思えました。それは、かつての自分が具体的に絵をかこうとしていたからだと思います。

再び当時の日記です。98 年 5 月 14 日です。「　「概説」は 1 つは、幾何もけいの話。と中、ねた。100 年以上前のゆいしょあるもけいだと知った。おもしろかったが、 4 次元多面体が 6 種類であるのを、代数的に証明しちゃうのは、何とも味気なくていただけない（私は）。」

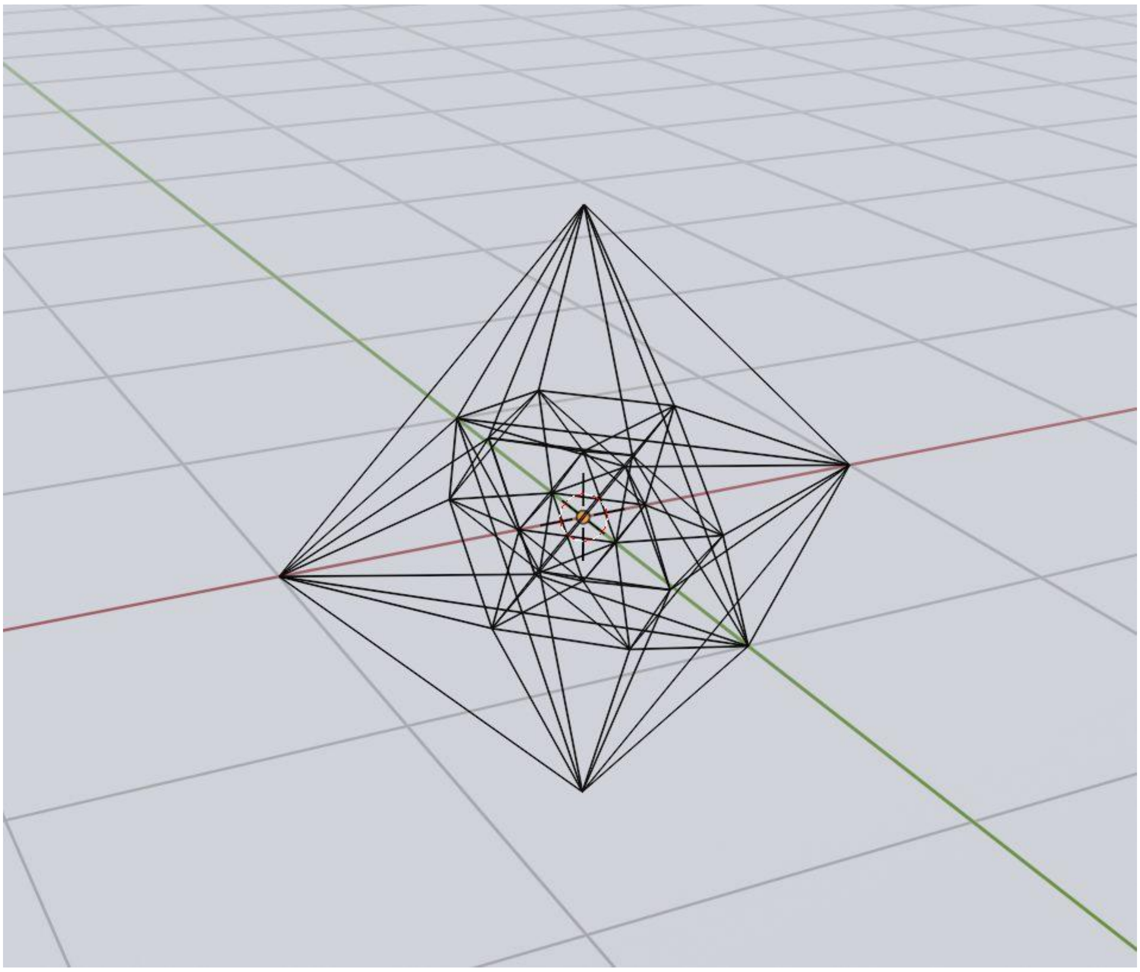

と中、ねた。 100年以上前の、ゆいしょある もけいだと知った。おもしろかったが、4次元多面体が
6種類であるのを、代数的に証明しちゃうのは、何とも味気なくて いただけない（私は）。

これより大分あとの後日談です。当教室で、かつての私が考えた 4 次元のことを、一緒に考えている高校生の生徒さんがおられます。その生徒さんは、この記事の最初のアイデアに基づき、自分で絵をかいて 4 次元の正多面体を考えました。2024 年からその翌年にかけてその生徒さんがかかれた図を、許可を得て載せます。

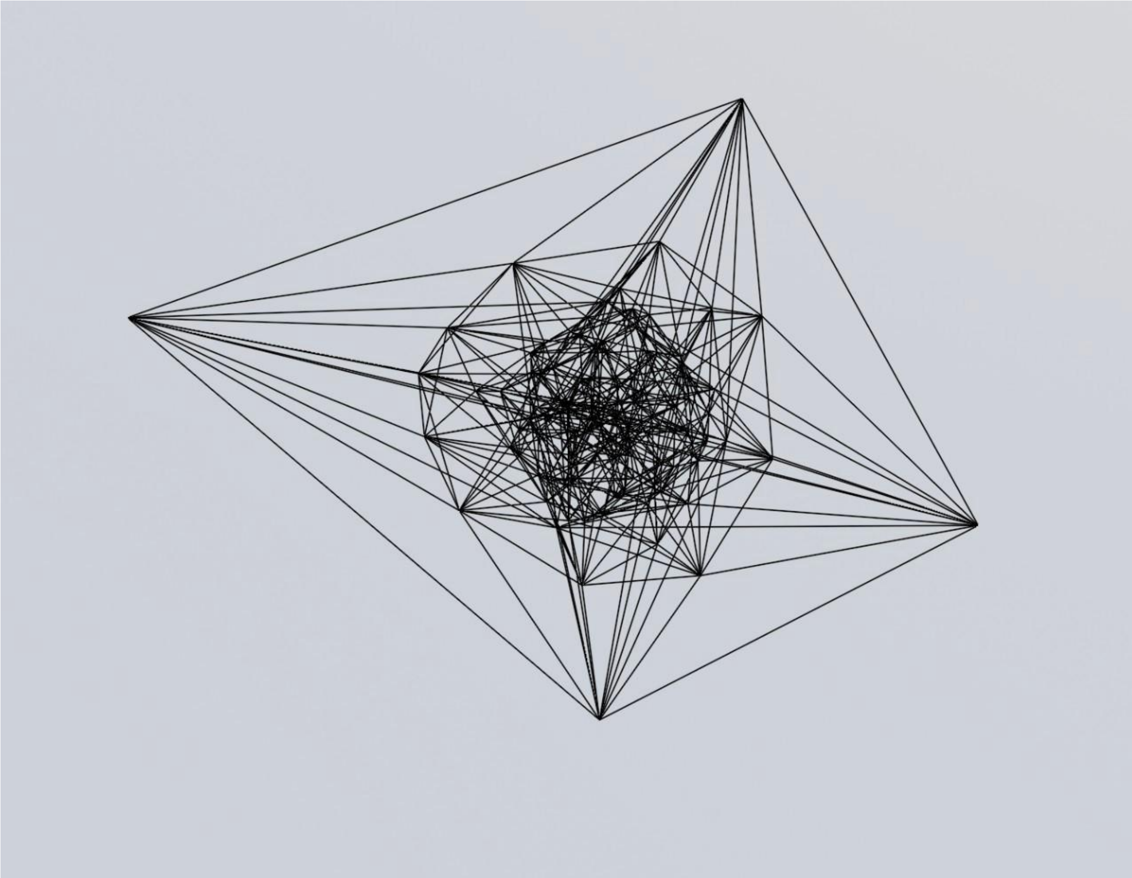
正十六体塊です。これはその生徒さんは Zoom のホワイトボードにかかれました。



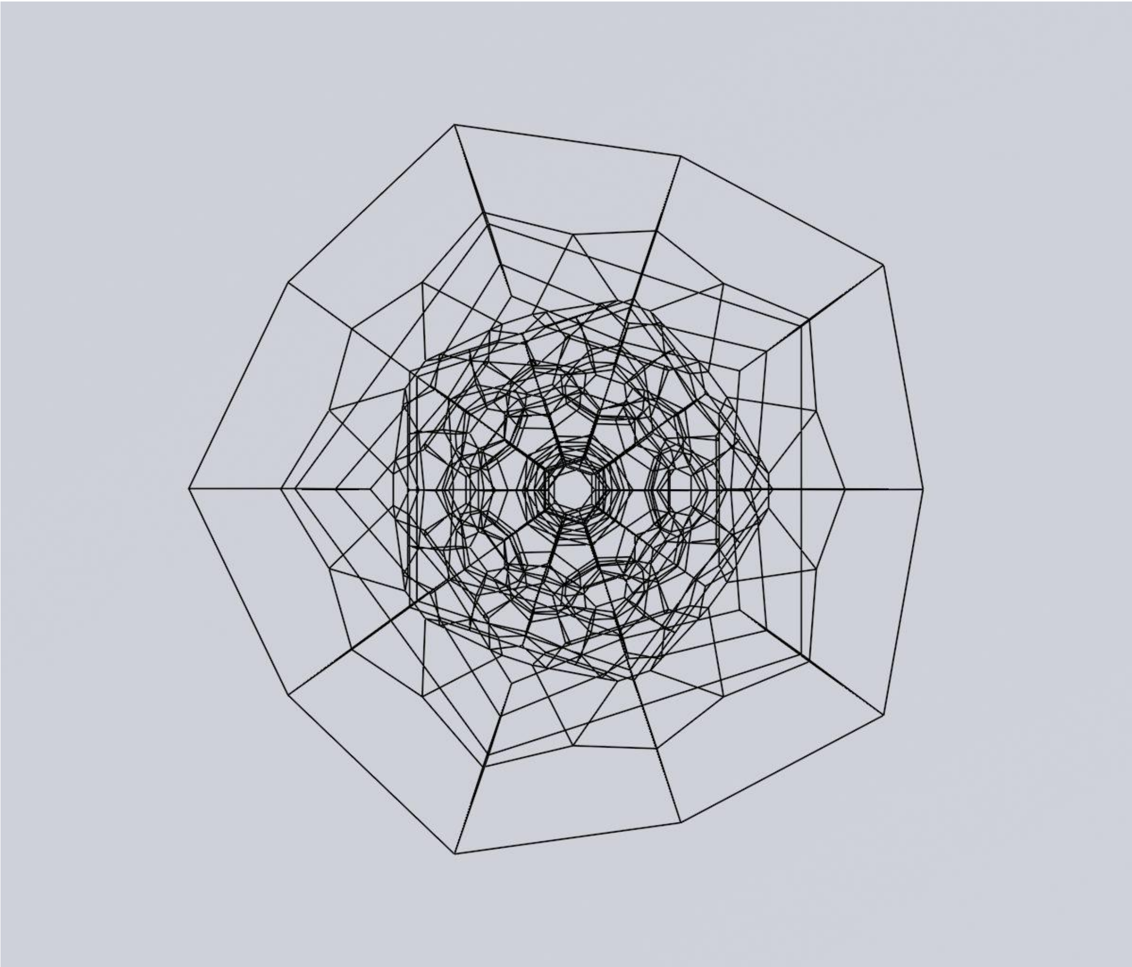
正二十四体塊からは立体をかくアプリ（Blender）でかかれました。



正六百体塊



正百二十体塊



第２３章　ノットイコール

以下は、高校生のときの話です。等号というものがあります。イコールと呼ばれ、左辺と右辺が等しいというものです。「=」と書かれるものです。数学の先生が授業で、等式を書き、それが必ずしも等しくないという意味で、その等号の上にななめの線を引き、「≠」としてしまう場面がときどきありました。私はそのたびにどうも割り切れない気持ちになりました。「≠」（ノットイコール）という記号は「絶対に等しくない」という意味であるように見えるのに、先生は「必ずしも等しくない」という意味で黒板に書かれるからです。これは当時、うまく言葉にできなかった疑問のひとつでした。大学に入って、そのような記号の使い方をする数学の先生はいなくなりました。本日は「ノットイコール」についての小さな思い出でした。（私は「ゲーデル、エッシャー、バッハ」という本で、「すべての」や「ある」というものについてなじんでいましたが、多くの場合それは高校生には難しいとされていて、それでε－δ論法のようなものは大学まで取っておかれるらしい・・・というようなことはずっとあとからなんとなく理解したことです。）

第２４章　ベクトル、行列、行列の積

高校１年のとき、ベクトルを習いました。先生が、ベクトルの足し算の説明をしてい

ました。私は、「数でないものを足している！すごい！」と思ったことを覚えています。これはいま考えますと、ベクトルの本質に驚いていることになるのかもしれませんが、これものちに「そうそう、オレもそう思ったんだよね」という人にあまりお目にかからない気がします。（皆さんおっしゃらないだけなのでしょうか。）

高校２年のとき、行列を習いました。ベクトルは数が１次元的に並んでおり、行列は数が２次元的に並んでいます。この次は数が３次元的に並んだものを習うのだろう・・・と漠然と思っていましたが、数が３次元的に並んだものは習いませんでした。これも「オレもそう思っていたんだよね」という人にはなかなか出会わないものです。さて、行列の足し算は、同じ位置にある成分どうしを足して新しい行列とするのでした。これはベクトルのときと同様です。そして、行列の積を習いました。非常に不自然なものでした！どうしてそんな奇妙な計算をするのか、不可解でした。そして、行列の積は、交換可能でないことを習いました。積の交換法則について、小学１年生のころに驚いたことは、第７章に書きました。10 が 7 個と 7 が 10 個が一致することに驚いた話です。とにかく、数の積は交換法則が成り立つのに、行列の積は交換法則が成り立たないのです。「そんな不自然な積の定義をするから、交換法則が成り立たなくなってしまうではないか」と思ったものです。ところが、しばらく学びを進めて行くと、一次変換というものを習いました。２次元のベクトルに対し、２×２の行列が作用して、平面で動かすものでした。ようやく、行列の積が、意味をもって感じ

られました。この、一次変換というものを習わなかったら、行列の積は無意味なものに思えたままだっただろう・・・と思ったものです。

先ほど触れましたように、成分が３次元的に並んだものは習いませんでした。大学に入ってすぐ、線形代数を習いました。すごいスピードでいろいろなことをたくさん習いました。改めて高校のときに思った疑問を思い出しますと、どうもこの膨大な線形代数の理論のどこかに３次元（以上）的な数の並びの議論はなされている気がするのと、やはりベクトルにベクトルを対応させるのが行列の大きな役割だとすると、入力と出力とで、やはり２次元的な数の並びをしているのが行列の本質であるような気がします。それから、数が３次元的な並びをしていたらノートや黒板に書きづらく、認識しづらいというのも大きいと思いました。大学・大学院と数学の学びを進めるにつけ、どうも数学は非常に人工的な学問であるという気がしました。人間の認識の都合で作ってある学問である気がするのです。星の王子さまが星で畑を耕しながら幾何学を発達させたら、それは球面幾何であった気がします（小さな星に住んでいるから）。大学院でしばらく２次元のトポロジーをやりましたが、種数gの閉曲面の図を黒板にかくとき、g個の穴のあいた横長のパンみたいな絵をかくのも、どうも人間の認識の都合による気もします。ここまでこの文章を書いてきて思いますが、どうやら私は、そのころよく、１次元→２次元→３次元→・・・と考えていたので、行列を習ったとき、次は数が３次元的に並んだものを習うのだろうと思ったらしいことがわかります。長

谷川浩司先生に最近おたずねしましたが、成分がn次元的に並んだものとして、テンソルというものがあるそうです。

第２５章　４次元の錐の体積、微分積分学の基本定理

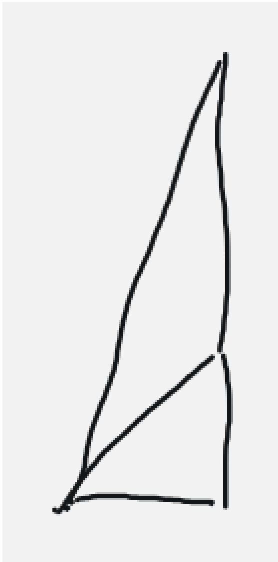
これは、高校生のとき、積分を自分で発見した話ですが、あとから積分は習い、大きく記憶に上書きがなされていますので、当時のことを正確に思い出すことは非常に困難となっています。しかし、なるべく順を追って書きたいと思います。

２次元における面積、３次元における体積に相当する４次元のもの、つまり、４次元の空間を満たす量、については、おそらく４次元について考えていた中学のころから考えていたと思います。具体的に以下に述べる計算ができたのは、高校２年で理系のクラスに入って、物理を習ったことによります。

私の高校では、理科は高校１年で全員が生物を履修しました。私は高校２年で物理と化学を選択しました。数学で微分および積分を習う前に、物理で以下のように微分に相当する考えを習ったわけです。すなわち、物理で、運動方程式を習いました。位置と速度、加速度の関係を習ったわけです。（おそらく物理と数学の教科書は、どちらを先に習っても大丈夫であるように書かれてあったのだと思います。）時刻がちょっとだけ経過すると、位置がちょっとだけ動く。位置が時刻の２次式だとすると、速度が時

刻の１次式となるような計算も習ったわけです。この発想は非常におもしろいと思いました。この発想をうんと展開すると、面積や体積が計算できるのではないかと思いました。この発想を(25.1)とします。

当時、ノートに書いていた図が右のようなものです。これは、２つの関数のそれぞれの微分係数の和が、２つの関数の和の微分係数となることに気づいてそれをチェックしている図です。つまり、私は微分という操作が線形であることを確かめていたことになります。なるほどなるほどと思いながらこの図を書いていたことを思い出します。



一方で、すでに書きましたように、以下のような発想は私の中にありました。第１７章に書きましたように、中学のころ、４次元における立方体を、次のように考えたわけです。すなわち、線分があり、その線分を含む直線と違う方向に（垂直に）その線分を動かしてできる図形が正方形である。正方形があり、その正方形を含む平面と違う方向に（垂直に）その正方形を動かしてできる図形が立方体である。同じように、立方体があり、その立方体を含む３次元の空間と違う方向に（垂直に）その立方体を動かしてできる４次元の図形がある・・・と考えて正八体塊を発見したのでした。つ

まり、私には「〇〇柱」という発想はあったことになります。この発想を(25.2)とします。

以下の発想も当時あったことは第１９章に書きました。線分があり、その線分を含む直線上にない点をとり、その点と、その線分上にあるすべての点を結んで得られる図形が正三角形である。正三角形があり、その正三角形を含む平面上にない点をとり、その点と、その正三角形上にあるすべての点を結んで得られる図形が正四面体である。同じように、正四面体があり、その正四面体を含む 3 次元の空間上にない点をとり、その点と、その正四面体上にあるすべての点を結んで得られる図形がある・・・と考えて正五体塊を発見したのでした。つまり、私には「〇〇錐」という発想もあったことになります。この発想を(25.3)とします。

発想(25.1)のアイデアは、微分（という言葉は当時習っていませんでしたが）の逆の操作をすれば、面積や体積は計算できるというものです。中学のとき、〇〇錐の体積は、〇〇柱の体積の$\frac{1}{3}$であることは fact として証明ぬきで習っていましたが、これを示すことはできました。(25.2)と(25.3)の発想から自然に以下のように考えられます。線分錐（三角形）の面積は、線分柱（長方形）の面積の$\frac{1}{2}$であり（これは小学校のときに根拠ありで習ったものですが；つまり平行四辺形を 1 つの対角線で切ると 2 つの合同な三角形となる)、点錐（線分）の長さは点柱（線分）の長さの$\frac{1}{1}$です。ここで、これが 4 次元だと$\frac{1}{4}$、5 次元だと$\frac{1}{5}$であることも同じように示せるわけです。物理で、多項式

の関数の微分の計算を習って知っていたからできる計算だったことになります。

このあと、数学の授業で正式に微分を習い、その逆の計算として積分を習い、積分をすると面積や体積が計算できることを習い、私の記憶には大きく上書きがなされたわけです。高校2年の冬ごろに、それまで4次元について考えたことは高校の「自由研究」という行事に出すためレポートにまとめましたが、その時点で、notation をはじめ私の頭には大きく上書きがなされた状態で執筆したと記憶しています（そのレポートは今のところ出て来ません）。

今考えますと、私は微分積分学の基本定理（(25.1)の発想）を自分で発見したことになるのかもしれません。当時、思っていたことを2つ書きます。微分の発想から積分に相当するものを思いついたと言っても、私は、微分や積分が使われた、現代文明のさまざまな機器に囲まれて育った中で発見したのであるから、そもそも何もないところから微分を編み出したニュートンさんの偉大さとは比較にならないこと。しかしながら、あとから振り返ってみても、(25.1)の発想は、われながらよく出たなあと思うほど、非常に飛躍した発想であったと思うことです。これは、当時（高校2年のとき）振り返ってもすでにそう思いましたが、今考えてもそうです。たとえば、私の修士論文は、私が書いた中で最も創造的な書かもしれませんが、あくまでそれは、先行するいくつかの論文をていねいに読んだら当然のように出る結果であったとも言えます。それに比べると(25.1)のアイデアは、大きく飛躍した発想だったと思います。

当時は、自分のこの気づきが、高校生としてどれくらい稀であるのか、わかりませんでした。大学や大学院でこういった話はしませんでしたので（中学時代や高校時代の「武勇伝」を語るのはいかにも恥ずかしい気がしたわけです）、いまだにこれがどれくらい稀なのか、見当がついていません。確かに、習う前に積分を知っていた人には会ったことがないと思います。

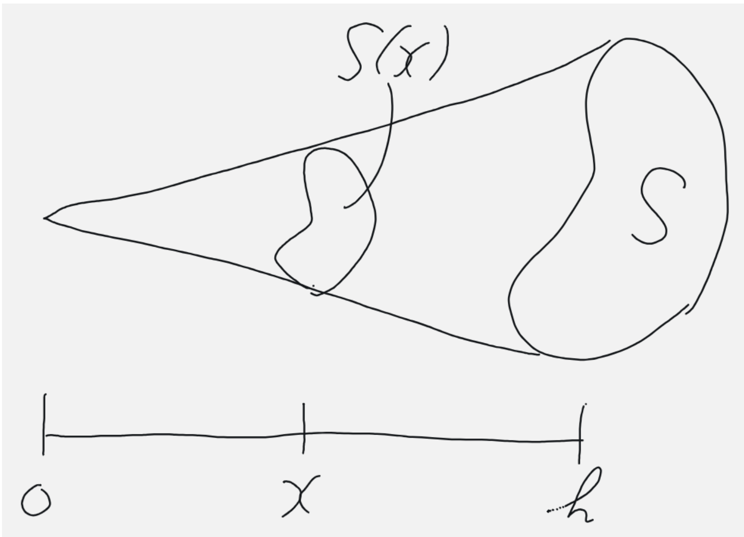
（2026 年 4 月 15 日の註です。2026 年 3 月 20 日に、「すうがく徒のつどい」という集会でこの話をしたあと、長谷川浩司先生から以下の話をうかがいました。長谷川先生は微分を習ったとき、速さから道のりを求める計算をすると、関数のグラフの下の部分の面積となることに気づいたそうです。私は、習う前に積分に気づいていた人に初めてお会いしたことになります。）

このたび、かつて自分の考えたことを振り返る機会をもち、どのような動機でこれらのことを考えたのかということを思い巡らすと、それは、４次元における体積を知りたいことだったと気づきます。(25.2)と(25.3)の発想はすでにあり、３次元の錐の体積は柱の体積の$\frac{1}{3}$だという fact を知っていると、多項式の微分の計算からおのずと思いついたのだと思います。

ここまで書いたら、以下は書かずもがなだと思いますが、当時考えた、４次元の錐の体積は４次元の柱の体積の$\frac{1}{4}$となる計算を、現在の notation で書きます。

（ここまでお読みになると、私は４次元の体積を表す言葉として「塊積」という言葉を編み出しそうに思えると思うのですが、塊積という言葉は編み出していません。そのレポートにまとめるとき、そのときの高校の先生が、「２次元で面積、３次元で体積というものに相当する言葉は、４次元、５次元でないでしょう。そういうときは『測度』というのですよ」とおっしゃったので、測度と書いたわけです。）

任意の３次元の図形をAとし、Aの体積をSとします。高さがhであるようなAの柱の４次元の体積をV_1とし、高さがhであるようなAの錐の４次元の体積をV_2とします。$\mathrm{V}_1 = \mathrm{Sh}$です。



Aの錐の頂点を原点Ｏとし、Aを含む３次元の空間に垂直にx軸を取ります。x座標がxであるような３次元空間でAの錐を切った切り口に現れる３次元の図形を$\mathrm{A_x}$とし、$\mathrm{A_x}$の体積を$\mathrm{S(x)}$とします$(0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{h})$。$\mathrm{S(h)} = \mathrm{S}$です。$\mathrm{A_x}$と$\mathrm{A}$は相似であり、相似比は$\mathrm{x{:}\,h}$です。したがって体積比は$\mathrm{S(x){:}\,S(h)} = \mathrm{x^3{:}\,h^3}$です。

V_2は以下のように計算できます。

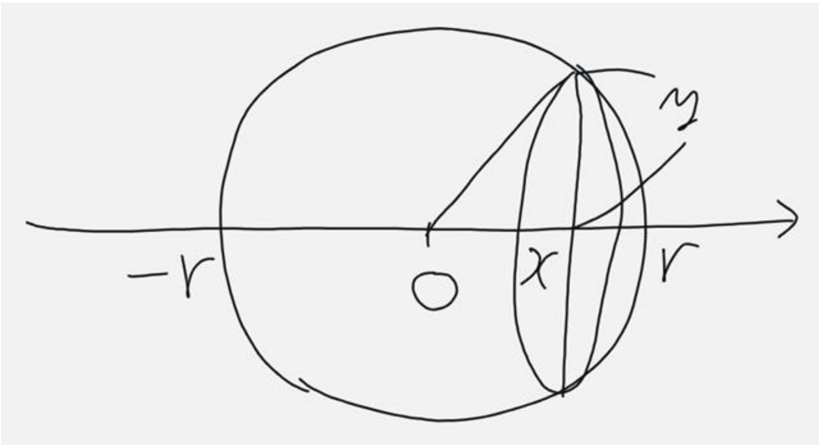
$$
\begin{aligned}
V_2 &= \int_0^h S(x)dx \\
&= \int_0^h \frac{S(h)x^3}{h^3}dx \\
&= \frac{S}{h^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h \\
&= \frac{Sh^4}{4h^3} \\
&= \frac{1}{4}Sh \\
&= \frac{1}{4}V_1
\end{aligned}
$$

これで、4次元において、○○錐の体積は○○柱の体積の$\frac{1}{4}$であることが言えました。

第２６章　正式に積分を習って4次元の球の体積や表面積を計算した

高校時代、4次元の球の体積も計算したことがあります。これは、数学で正式に積分を習い、置換積分のような計算技術を習ったのちのことになると思います（私は置換積分のようなものは編み出していません）。以下のような計算だと思います。

半径がrの4次元の球の中心を原点Oとし、x軸を引きます。x座標がxの3次元空間でその4次元の球を切った切り口は3次元の球になりますが（$-r \le x \le r$)、その半径をyとすると、三平方の定理から、$x^2 + y^2 = r^2$です。つまり、その3次元の球の体積は$\frac{4}{3}\pi y^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3$です。



その4次元の球の4次元の体積Vは以下のように計算されます。

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^3 dx \\
&= 2\int_{0}^{r} \frac{4}{3}\pi (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx
\end{aligned}
$$

ここで$x = r\mathit{sin}\theta$とします。

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{8}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - r^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{d\theta} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} r\cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{2}{3}\pi r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+4\cos 2\theta+1+\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^4\left[3\theta+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\pi r^4\cdot\frac{3}{2}\pi$$

$$=\frac{1}{2}\pi^2 r^4$$

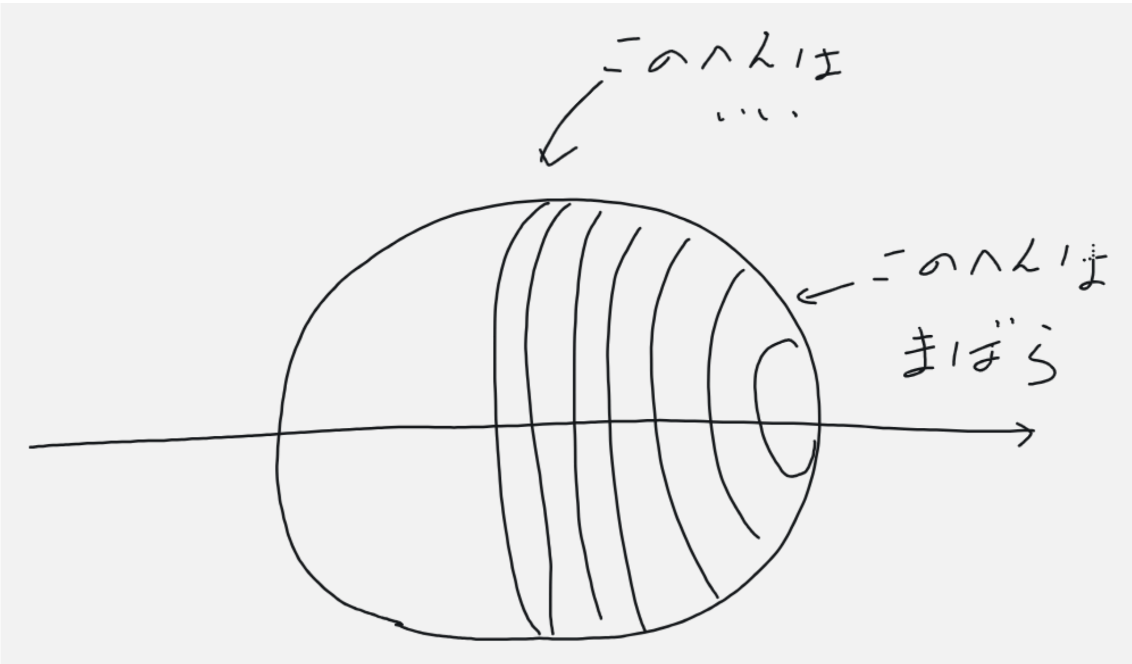
また、普通の意味での球の表面積の公式は、球の体積の公式と同じく、中学で fact として習っていたわけですが、その、球の表面積の公式と体積の公式の関係が、以下のように教科書で述べられていました。第１１章で述べた、円の面積と円周の長さの関係を説明するときの議論の高次元化と言えます。

球を、その中心を通るいくつかの平面で切ってできる図形は、それを非常に細かく切ればひとつひとつは角錐であると見なせる。それらの角錐の体積の和は、球の体積であり、それらの角錐の底面積の和は、球の表面積となるはずである。つまり、半径が r の球の体積を V とし、表面積を S とするなら、$V=\frac{1}{3}Sr$となるはずであり、実際に$S=4\pi r^2$とすれば、$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ となるという話です。これは、$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ は積分で計算できて、角錐の体積も計算できる今、そこから球の表面積の公式は導けるわけです。

それで、以下のようにして、円周の長さを積分しても、球の表面積の公式は導けるこ

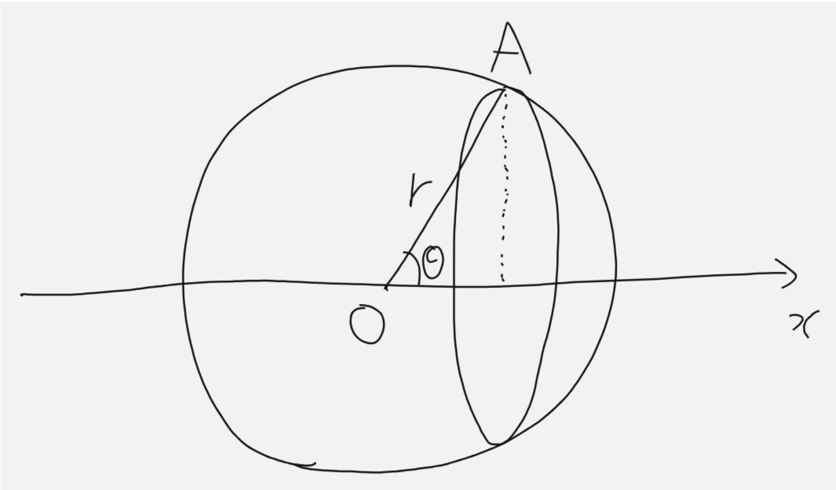
とに気づきました。

以下は、球の表面積について、積分で計算できるという話を、クラスメイトとしゃべっていたという話です。半径がrの球面の中心を原点Oとし、x軸を引き、x軸に垂直な平面で球面を切ったときにできる円周の長さを積分で足し合わせて、球の表面積が計算できます。しかし、これは、球の体積を計算するときのように、xで積分してはいけないわけです。以下に、球面をx軸に垂直な平面でスライスしたとき、x軸で均等に切ったら、球面上でまばらになる（均等にならない）現象を絵にかきます。



これは、その球面上を通る、円の円周（北極と南極を通る直線をx軸としたときの経線）にそって均等に切れば、球面上でも均等になるので、そのように積分すればよいわけです。

以下の図のように、球面上の点を A とし、x軸と線分 OA のなす角をθとします。A を通りx軸に垂直な平面で球面を切ったときの切り口の円周の長さである$2\pi r\sin\theta$を、rθで積分したものが球の表面積 S です。



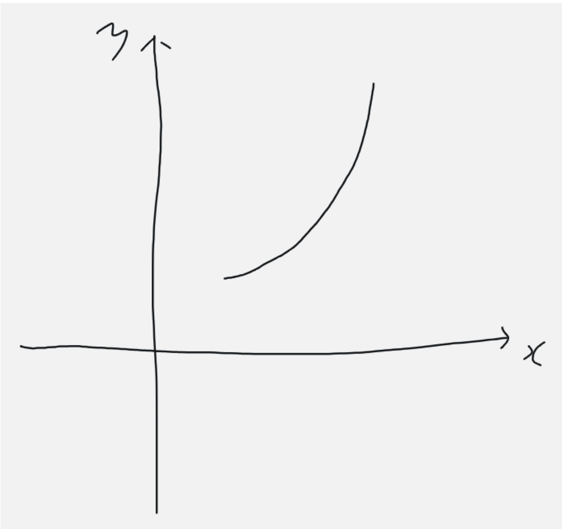
$$S=\int_0^{\pi r}2\pi r\sin\theta\,d(r\theta)$$
$$=2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$
$$=2\pi r^2[-\cos\theta]_0^{\pi}$$
$$=4\pi r^2$$

これでちゃんと、学校で習った球の表面積の公式である$4\pi r^2$と一致する、ということをクラスメイトとしゃべっていました。

（いま考えますと、この話は積分を知っているクラスメイトと共有できるからクラス

メイトとしゃべっているわけです。「自伝風の読み物」に書いた多くのことは、級友とも、しばしば先生とも共有できない話題でした。）

少し余談を書きます。のちに、学校のテスト（おそらく校内模試という実力テストみたいなもの）で、以下のような問いが出ました。どういう式で表されるのか忘れていますが、第一象限に、図のような、増加する関数で、増加の度合いも増加する関数の



グラフがあり（つまり下に凸なグラフ）、この曲線をx軸にかんして１回転させて得られる曲面の面積を求めよ、というものです。これは先ほどの球の表面積の計算と同じであるわけです。曲線にそって積分する必要があります。テスト返却のとき、先生は、これができたのはクラスで私を含め４人だったとおっしゃいました。ただし、私以外の３人は最後まで計算できていて、私だけ、式は立てられたのですが、計算ができませんでした。先生は私を、できた人のうちにカウントしてくださったわけです。クラスの残り三十数人は、xで積分して、計算があわなくなったようでした。

（高校時代によく出た、さまざまな３次元の形の体積を、積分を駆使して求めなさいという問いは、３次元の図形は３次元の空間のなかで曲がっていない、すなわち曲率が０なので、問題なくxで積分して出るわけでした。）

ずっとのち、大学生になり、こういう曲面は、曲率が負なのであり、(先ほどの球の表面積で言えば、球面は曲率が正であり、)曲率が0でないものの面積等は、扱いが非常に繊細なのであり、したがって大学の先生は、たとえば高校生向けの出題である大学入試で、こういう問い(先ほどの校内模試のような)はまず出さないのだ、ということをだんだん知りました。

さて、4次元の球の表面積Sを積分で求める計算を書きます。先ほどと同じように、半径rの4次元の球の中心を原点Oとし、x軸を引き、球の表面上にある点をAとし、x軸と線分OAのなす角をθとします。Aを通りx軸に垂直な3次元空間でその4次元の球を切ったときの切り口である球の表面積である$4\pi(\mathrm{r}\sin\theta)^2$を、rθで積分します。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \int_0^{\pi \mathrm{r}} 4\pi(\mathrm{r}\sin\theta)^2 \mathrm{d}(\mathrm{r}\theta) \\
&= 4\pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta \\
&= 4\pi r^3 \int_0^{pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= 2\pi r^3 \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi^2 r^3
\end{aligned}
$$

もう一つの計算を書きます。先ほどの中学の教科書に載っていた理屈のさらに高次元化です。４次元の球を、中心を頂点とするたくさんの４次元の角錐の集まりと見なして、その角錐の体積の和が球体の４次元の体積となり、その角錐の底面積の和が４次元の球の表面積となるというものです。

４次元の球の体積をＶとし、表面積をＳとします。先ほどの計算より、$V=\frac{1}{2}\pi^2 r^4$です。

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4}Sr \\
S &= \frac{4V}{r} \\
&= \frac{4}{r}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 r^4 \\
&= 2\pi^2 r^3
\end{aligned}
$$

第２７章　角度の高次元化

今回の記事は、高校２年か３年のころ、自分でガウス・ボンネの定理（の一部）に気が付いていたらしいという記事です。よく思い出してみるとガウス・ボンネの定理の本質は発見することの決してなかった自分の限界を記した記事であるとも言えます。

なるべく当時を思い出しながら書きますが、これも微分積分学の基本定理の発見の話（第２５章）と同様、あとから習ったことによって、記号や用語等が、大きく頭に上

書きされてしまっていることをお断りしておきます。また、私には大学の教員の経験がなく、三十代のときに中高の教員を経験し微分積分を振り返る機会がたくさんあったのと違って、ガウス・ボンネの定理を教師として振り返った経験がないこともあわせてお断りしておきます。

４次元における正多面体（正多体塊）はいくつあるのであろうか。この問いについて考えたことは、第１７章、第１９章、第２２章に書きました。これは、ラジアンを習うことによって、以下のような進展がありました。当時、おそらくいろいろな方面から考えていたと思うのですが、以下のアイデアは、頓挫することになります。しかし、それを考えることによって、けっこう美しい副産物があった、という記事になります。

大元のアイデアは、以下のものです。これは、小学生であったとき、学校に置いてあった「天才バカボン」の学習マンガに書いてあったと記憶する以下の理屈です。正多面体が５種類しかないということについてのものです。正三角形を１つの頂点に３つずつ集めると、正四面体ができます。正三角形を１つの頂点に４つずつ集めると、正八面体ができます。正三角形を１つの頂点に５つずつ集めると、正二十面体ができます。正三角形を１つの頂点に６つずつ集めると、まったいらな面ができます。

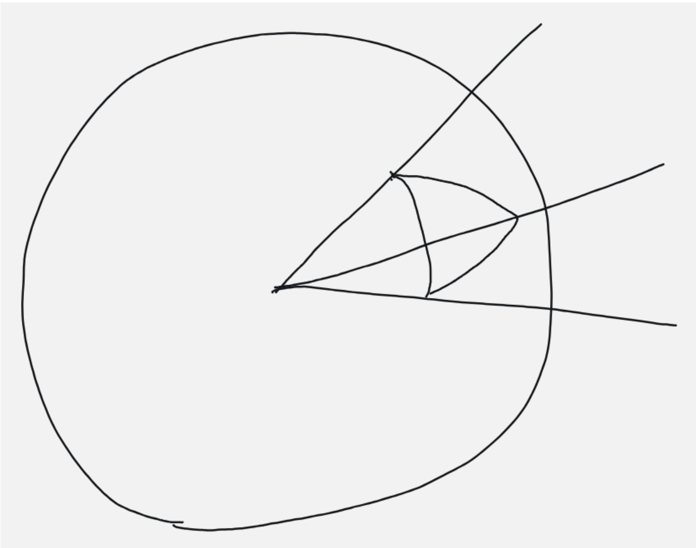
$60^\circ \times 6 = 360^\circ$だからです。正三角形を１つの頂点に７つずつ集めると、これも正多面体はできません（※）。正三角形を１つの頂点に８つ以上集めても正多面体はできませ

ん。正方形を１つの頂点に３つずつ集めると、立方体ができます。正方形を１つの頂点に４つずつ集めると、まったいらな面ができます。$90° \times 4 = 360°$だからです。正方形を１つの頂点に５つずつ集めても正多面体はできません。正五角形を１つの頂点に３つずつ集めると、正十二面体ができます。正五角形を１つの頂点に４つずつ集めても正多面体はできません。正六角形を１つの頂点に３つずつ集めたらまったいらになります（$120° \times 3 = 360°$）。正七角形を１つの頂点に３つずつ集めても正多面体はできません。正八角形以上の正多角形でも同様です。以上の議論から、正多面体はここまでに出て来た５種類しかないのです・・・。この理屈は秀逸ですが、私は読んでしまったので思いついていません。この理屈が、高校でラジアンを習うことで、以下のような進展があったのです。

ラジアンとは角度の単位であり、角（１つの頂点から出ている２つの辺の作る形）の頂点を中心とした半径１の円の、その角が切り取る弧の長さのことです。たとえば直角の頂点を中心とした半径が１の円の直角が切り取る弧の長さは$\frac{\pi}{2}$なので、直角は$\frac{\pi}{2}$ラジアンです。これを高次元化して、「バカボンの理屈」を適用したら、正多体塊が何種類か、わかるのではないか、というふうに思ったわけです。

以下のように考えます。図は、正四面体の頂点の近くです。一般に、三角錐の頂点の近くとしましょう。正八面体の頂点の近くであれば、四角錐の頂点の近くです。これを、３次元的な角（高次元化された角）と考えます。この頂点を中心とする、半径１

の球面を考えます。この 3 次元的な角が、その球面を切り取る部分は、球面上のある図形になります（以下の図で、曲がった三角形のようなもの）。これが、角度の高次元化に相当するものであるはずだと考えたのです。



この考えを実行に移そうとする段階で、おもに以下の 3 つの気づきがあったということを思い出します。その 3 つを書きます。

i)　高次元化された角の単位球面による切り口には、1 次元低い図形が現れる

ii)　曲がった線のなす角について

iii)　高次元化された角度は数で表されない

（少し余談ですが、これらを考えていたときの情景を思い出します。その一つは、体育の水泳の授業です。先生は「泳げない者は歩け！」とおっしゃっていました。私は泳げないので、50 分間、プールの中を歩いていました。泳げるようにはなりませんで

したが、こういうときに手持ちぶさたなので、漠然とこれらのことを考えていたのでしょう。もう一つは、これも体育の授業ですが、剣道の授業で、正座しながら順番を待っているときの光景です。同じタイミングで、所属していたオーケストラ部の高３のときの文化祭での出し物である、ムソルグスキー＝ラヴェルの「展覧会の絵」のことを思い出したりしますので、どうも高２の冬に「自由研究」のレポートを出したあとのことではないかという気もするのですが、そのレポートは出て来ませんし、分かりません。とくに、上記ｉの気づきは、プールの情景とともに思い出します。）

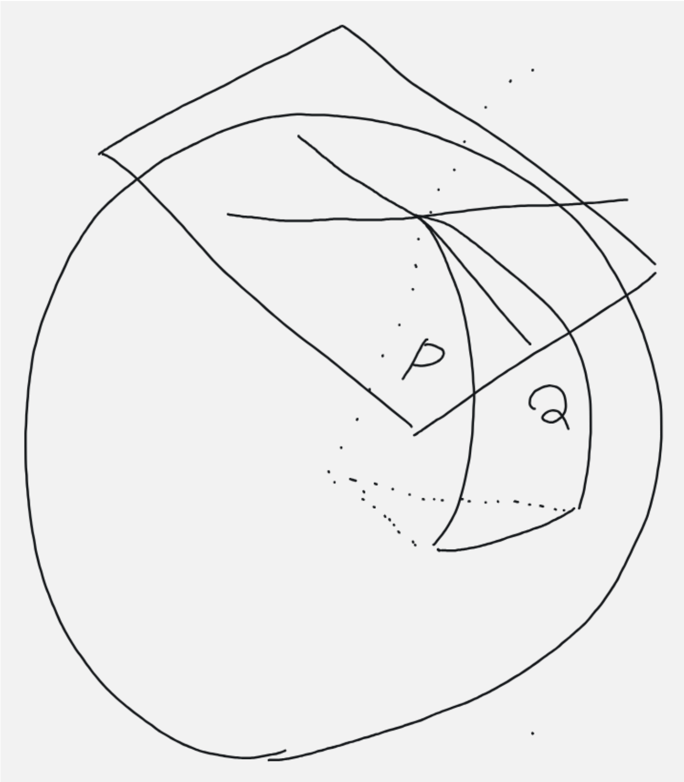
ｉから順番に書きます。高次元化された角の単位球面（半径１の球面）による切り口には、１次元低い図形が現れることの気づきです。たとえば、上の図では、単位球面に、曲がった三角形のようなもの（「三角形もどき」）が現れていますが、これは２次元での三角形に対応しています。先ほどの「バカボンの理屈」で、正三角形を１つの頂点に３つ集めると正四面体ができると書きました。正三角形を１つの頂点に２つあるいは１つ集めることはナンセンスとされているわけですが、これは、二角形や一角形（二辺面、一辺面）が存在しないことに対応します。また、これをさらに１次元上げますと、４次元の角の頂点を中心とした半径１の４次元の球が、その４次元の角を切り取る切り口に現れる３次元の曲がった図形は、もとの図形が正多体塊であるなら、正多面体である必要があることに気づいたりしたわけです。

さて、先ほどの図で、「三角形もどき」の、３つの辺は、半径１の円（大円）です。な

ぜなら、その三角錐の側面は、その球の中心を通る平面だからです。(当時、「大円」という言葉は知らなかったかもしれませんが、先述の通り、あとから覚えた用語や記号が私の頭に上書きされています。以下、大円と言います。)

ii の気づきです。曲がった線のなす角についてです。上に述べた、「三角形もどき」の辺は大円の一部であるわけです。その２つの大円、すなわち２つの曲がった線に囲まれた（普通の意味での２次元の）角もあり得るのかもしれませんが、私はしばらく、ある頂点から出ている２つの曲がった線の作る形（角）の「開き具合」(角度）については、ぼんやりと、測れない（定義できない）気がしていました。分度器をあてても測れそうにありません。ところが、以下のことに気づいたときがあるのです。その頂点の周辺を拡大すれば、その２辺はほとんど直線である。あるいは、その頂点における２つの曲がった線のそれぞれ接線を考え、その２つの接線のなす角度を、その２つの曲がった線のなす角度と定義すればよい。このようにして、２つの曲がった線のなす角（角度）というものは存在すると気づいたのです。

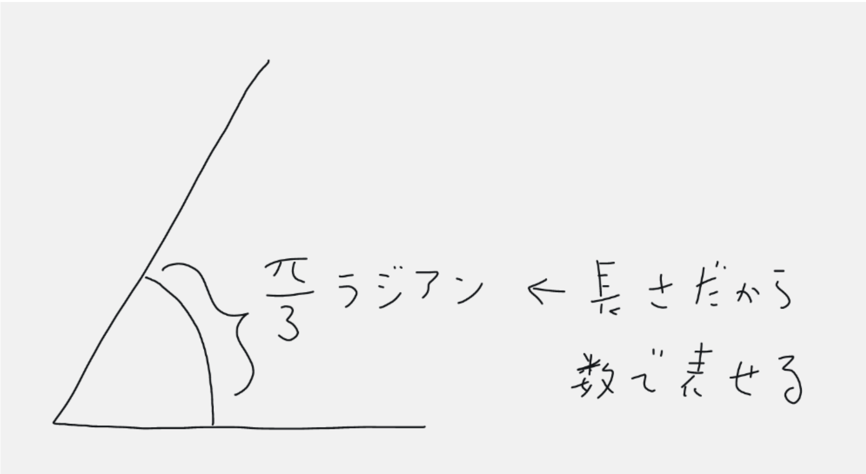
そうしますと、先述の「三角形もどき」(球面上で、３つの大円に囲まれた形）の、２辺のなす角は、その三角錐の２枚の側面である平面（P、Qとします）の面角であると気づきます。その頂点における単位球面の接平面は、P、Qのいずれとも垂直だからです。(「面角」や「接平面」というような言葉も当時は知らなかったでしょう。)



iii の、高次元化された角度は数で表されないという気づきです。しばらく、これら一連のこと（角度の高次元化について）を考えていました。漠然と、普通の意味でのラジアンは、数で表され、それは角が切り取った弧の長さでしたから、その１次元高いものを考えたときは、その角が切り取る球面上の図形の面積だろうと思っていたのだと思います。ところがそれはよく考えると違いました。このことを考えた動機は、小学生のときに読んだ「バカボンの理屈」であるわけです。それを高次元化して、正多体塊の種類を数えたいわけです。その３次元の角が、１つの頂点にいくつ集まると、「オーバー」となるのか。それは、その３次元的な角を、単位球面が切り取る図形の、面積だけではなく、大きさや形も込めて考えなければなりません。つまり、３次

元的な角の、ラジアンの高次元化は、その図形の、大きさや形そのものなので、数で表せないのです！

逆に言いますと、普通の意味での角度は、例外的に数で表されるとも言えます。普通の意味での２次元的な角を、その角の頂点を中心とする単位円が切り取る図形は、半径が１の円の、弧です。弧は、１次元的な図形であり、長さで決まります。長さは数で表されます。これが、普通の意味でのラジアン（角度）が、数で表されるという現象です。図参照。



（ここまで、曲がった図形のさまざまなことを考えている当時の自分を思い出しながら書いておりますが、当時の私は、高校生的に素朴に、１次元と言えばまっすぐな直線、２次元といえばまったいらな平面のみを考えていました。いま触れた、弧のようなものは、専門的には、曲がっていても１次元と言うわけですし、４次元の球の表面は、３次元球面というわけです。正多体塊を考えることは、３次元球面のセル分割を

考えていることになりますが、当時はそういう、曲がった線を１次元と言ったり、曲がった面を２次元と言ったりするという発想はなかったことになります。そもそも「次元」という言葉が高校までに学校で習った言葉ではありません。）

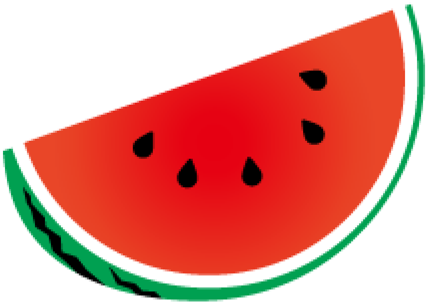
この「iii」の気づきによって、この道は頓挫することとなりました。この道は予想以上に厳しいことに気づいたわけです。しかし、私は以下のように考えました。せめて面積は知りたい。だいぶ険しい道だと気づきましたが、目標を下げてみることにしたわけです。

（球面上の大円が、球面上で「まっすぐな線」であることには気づいていたと思います。社会の時間に習った、さまざまな世界地図の話を覚えています。地球上で、たとえば赤道に沿って歩くのは「まっすぐ歩いた」ことになり、北回帰線に沿って歩くのは、「まっすぐ歩いた」ことにならないわけです。普通の意味で、まっすぐな線とは直線のことで、「最も近い道」のことです。しばしば、円柱の側面や円錐の側面の上で、最も短い道のりを計算せよという数学の問題を当時やらされましたが、それは、それらを展開して平面としたときの「直線」の長さであったわけです。球面は平面に展開できず、それゆえにメルカトール図法を初めとする世界地図を平面にかく技法では、どうしても縮尺がどこかで狂います。このことの認識は当時ここまででした。）

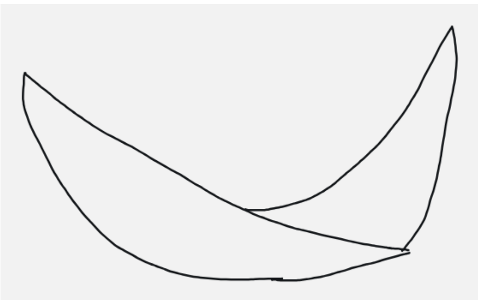
三角錐の頂点を中心とする半径１の球面がその三角錐を切り取る形は、３つの大円で

囲まれた形（以下「三角形もどき」と呼びます）です。先ほど述べましたように、三角錐の３つの面角を、α、β、γとしますと、３つの大円のなす角（先ほど述べましたように、曲がった線のなす角の角度は定義されます）は、α、β、γとなります。（ここでこれはガウス・ボンネの定理をあとから知ったことによる notation ですが、当時の記憶に大きく上書きがされているために、当時の自分がどういう記号で書いていたかは今となっては不明です。）最初、この面積は、積分で求めようとしていました。第２５章、第２６章に書きましたように、当時、積分は見つけていた上に、習っており、半径がrである球の表面積は、$4\pi r^2$であることは積分によって確かめることができていました。同じように、この「三角形もどき」の面積も、積分で求めようとしていました。ところが、よく考えてみると、以下のように、これは、足したり引いたりするだけで出てしまうのです。

球面上で、大円２つで囲まれた以下のような形を考えます。私が子供であったころ、マンガで、スイカを、中心を通る２つの平面で切って食べている絵をよく見ました。以下のようなイラストです。（これは著作権フリー写真イラスト素材の gahag さんからいただいて参りました。）



実際にはもう少し細かく切らないと食べづらいでしょうが、このようにスイカを切って食べるとすると、以下のような形は、スイカを食べ終わったときのような形となるわけです。この「スイカを食べ終わったときのような形」は、面積がわかるのです。

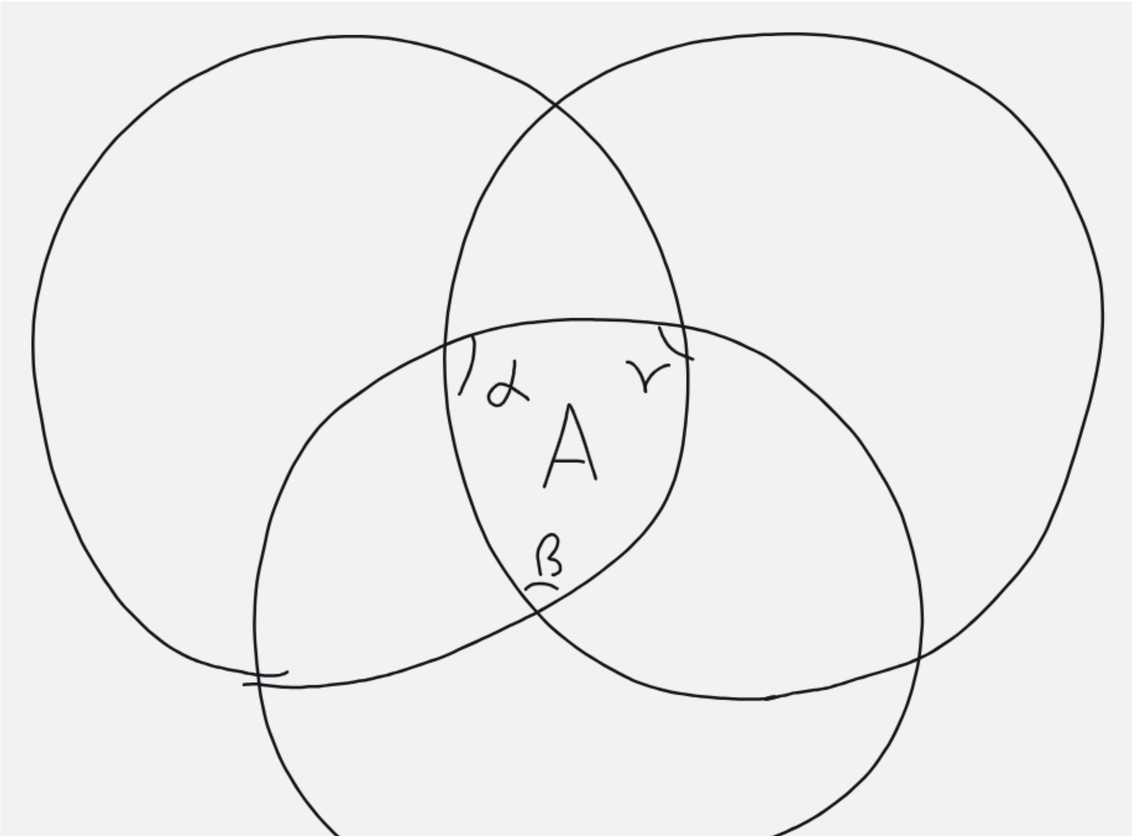


「スイカを食べ終わったときのような形」の一方の角の大きさをαとします。するともう一方の角の大きさもαです。なぜなら、αは、その２つの平面の面角であり、その２つの点は互いに対蹠点だからです。そして、これは、球面全体の面積の、$\frac{\alpha}{2\pi}$倍であることに気づきます。なぜなら、２つの点を地球における北極と南極としますと、この図形は２つの経線で囲まれた形であり、その面積は地球の面積の2πラジアンぶんのαラジアン倍だからです。半径が１の球面の面積は4πですので、角の大きさがαであるような「スイカを食べ終わったときのような形」の面積は、

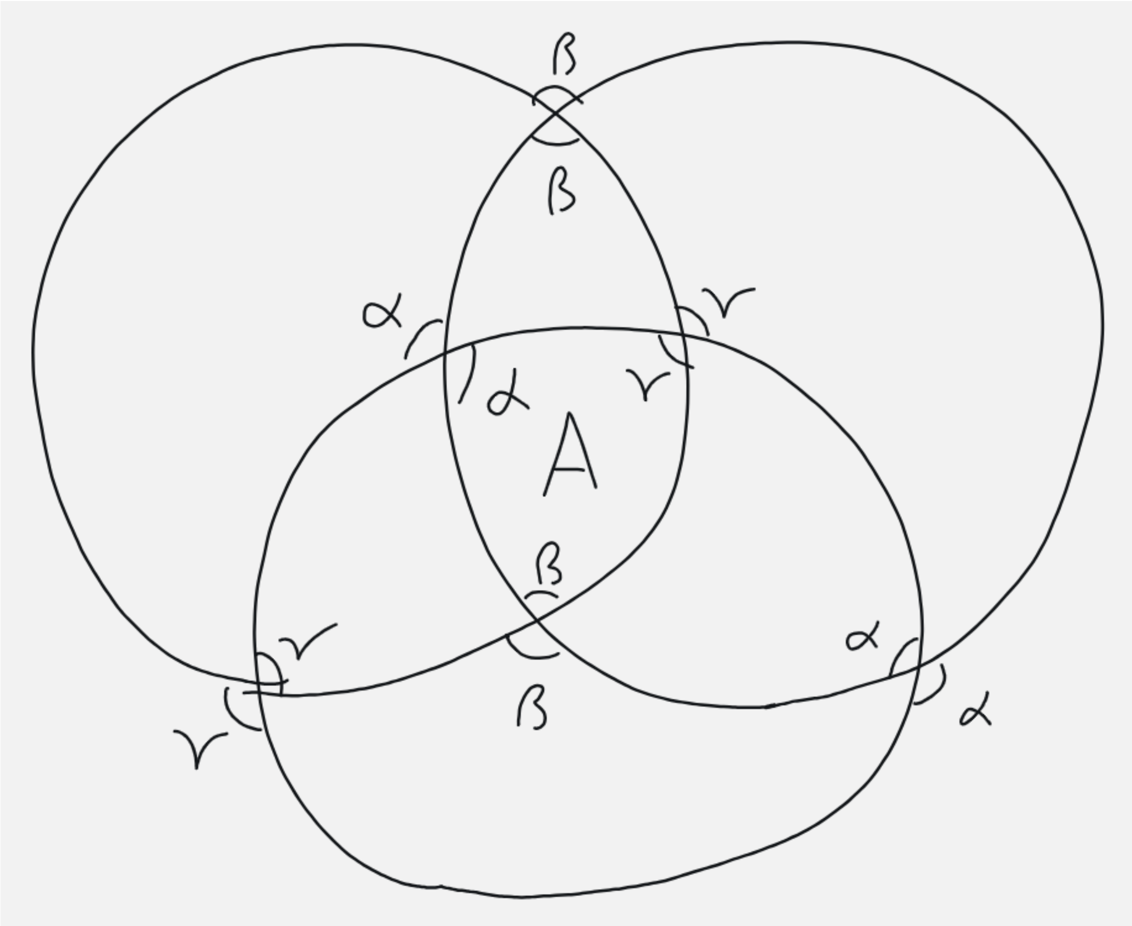
$$4\pi \times \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

であると分かります。

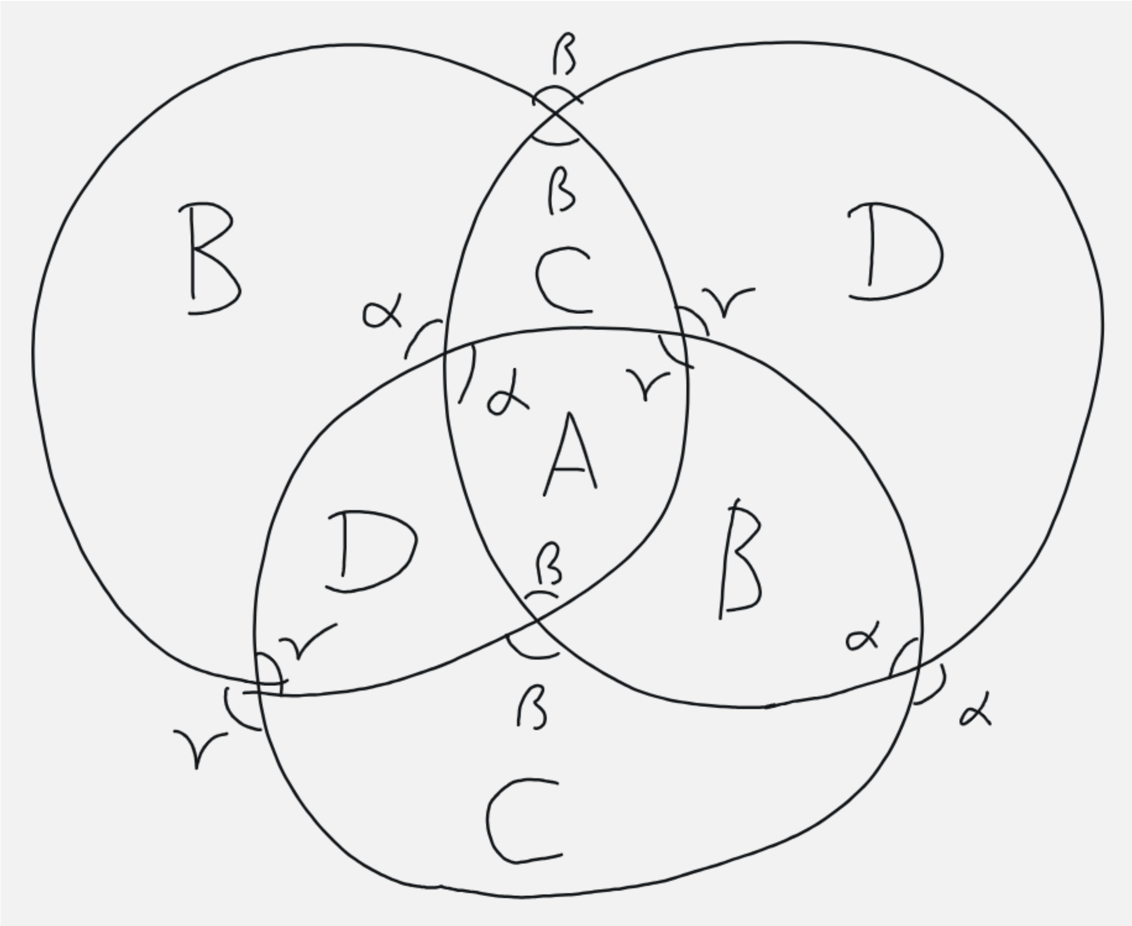
ここで、先ほどの、３つの角がそれぞれα、β、γであるような「三角形もどき」の面積をＡとします。Ａが知りたい数です。この「三角形もどき」の絵を以下のようにかきます。



すると、上に見ましたように、２つの大円で囲まれた形の２つの角は等しいので、以下のようになります。（対頂角が等しいことも使った。）



以下のように、球面全体が、８つの「三角形もどき」に分割されていますが、よく観察すると、それらのうち、地球の反対側にある「三角形もどき」は、形も大きさも同じであり、つまり合同であって面積が等しいことに気づきます。これに注意して、以下の図のように、ほかの「三角形もどき」の面積を、B、C、D と名付けます。



角の大きさがαであるような「スイカを食べ終わったときのような形」の面積は2αですので、図より以下の等式が成り立ちます。

$$(27.1) \qquad A + B = 2\alpha$$

同じようにして、以下の等式が成り立ちます。

$$(27.2) \qquad A + C = 2\beta$$

$$(27.3) \qquad A + D = 2\gamma$$

そして、大円で囲まれた部分は球の半分なので、その面積は2πであることから、以下の式が成り立ちます。

$$(27.4) \qquad A + B + C + D = 2\pi$$

(27.1)から(27.3)までの両辺を足して以下の式が得られます。

$$(27.5) \qquad 3A + B + C + D = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$$

(27.5)から(27.4)を引きます。

$$(27.6) \qquad 2A = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\pi$$

(27.6)の両辺を 2 で割ります。

$$(27.7) \qquad A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

A が知りたかった数なので、(27.7)が結論です。

「三角形もどき」の面積は、足したり引いたりすることで出てしまいました。かなりシンプルな式となったので驚きました。

これが正しい式か、以下のような検算が思いつきます。（もちろん先生に聞いて先生が知っているとは思えず、友達に言って分かってもらえるとも思えないので、自分一人で抱え込むことになります。答え合わせはできないわけです。もっとも、分からないから考えたのだということは言えます。）

球面の半径を非常に大きいものとします。するとこの「三角形もどき」は、ほとんど平面上の三角形と見なせます（大円はまっすぐな線なので、まったいらな面の上だと直線だと見なせます)。その面積は、非常に小さいと見なせますので、いっそ面積はゼロとします。そこで(27.7)で A=0 とします。以下のようになります。

$$(27.8) \qquad \alpha+\beta+\gamma-\pi=0$$

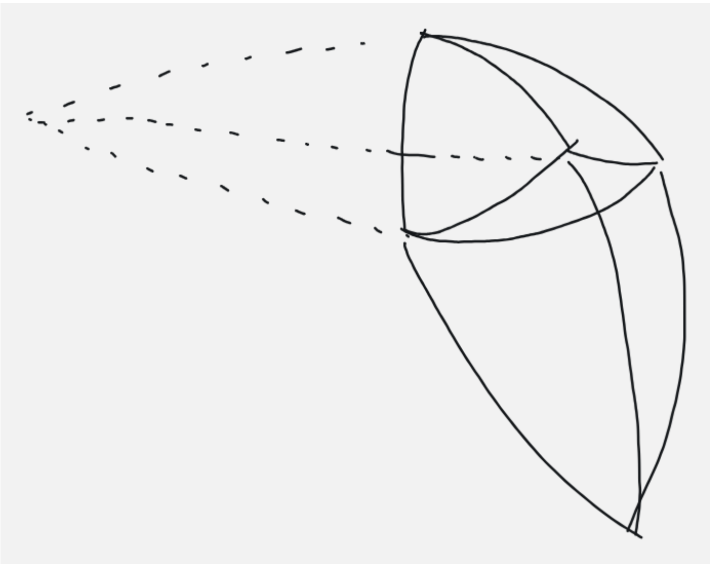
ここでπを移項して、以下の式を得ます。

$$(27.9) \qquad \alpha+\beta+\gamma=\pi$$

これは、平面上で、三角形の３つの角の和が180°であることを意味しています。これで私は「確かにおかしくない」と思ったわけでした。

これは、習う前に、ガウス・ボンネの定理の一部に気が付いていたことになるのかもしれません。しかしこれは以下に書きます通り、少なくとも当時の私の認識の限界でもあり、その意味で私はガウス・ボンネの定理の本来の精神には気づいていないとも言えると思います。

さて、ここから考えたことがあります。これをもう１次元、高次元化することはできないであろうか。すなわち、以下の図のように考えるわけです。



半径１の４次元の球の表面（３次元球面）を考えます。その上で、半径１の２次元球面（大球というのでしょうか）４枚にかこまれた「四面体もどき」を考えると、これの体積が、さっきの議論と同じように、足したり引いたりで出るのではないかと思ったわけです。図のように、大球３枚に囲まれた「３次元的な『スイカを食べ終わったときのような形』」を考え、これの体積を考えて、同様の議論をします。ところが、このやり方だと、足したり引いたりで「四面体もどき」の体積は出ないのです。ずっとのち、大学で専門的な数学を学び、こういう場合、奇数次元と偶数次元で、振る舞いが違うことを学びましたが、そのことはこのとき、直観的に実感したことです。(先ほど書きましたように、私には大学の数学の教員の経験がなく、これらのことを体系的にあとから振り返ったことがほとんどなく、頭の中で整理された状況ではありません。)

（このたびこの記事を書くにあたり、三十何年かぶりにこの計算をしてみました。確かに出ません。)

書きながら少し思ったことを書きます。私は先述の通り、高校２年の冬ごろ、４次元について考えたことを、レポートにまとめて高校に提出したわけです。そのとき「正多体塊」「配偶（双対という意味)」というような言葉は、表現するのに必要であることから考え出さねばならなかったわけですが、本日の記事に出る「スイカを食べ終わったときのような形」であるとか「三角形もどき」とかいう言葉は、いかにもぶかっ

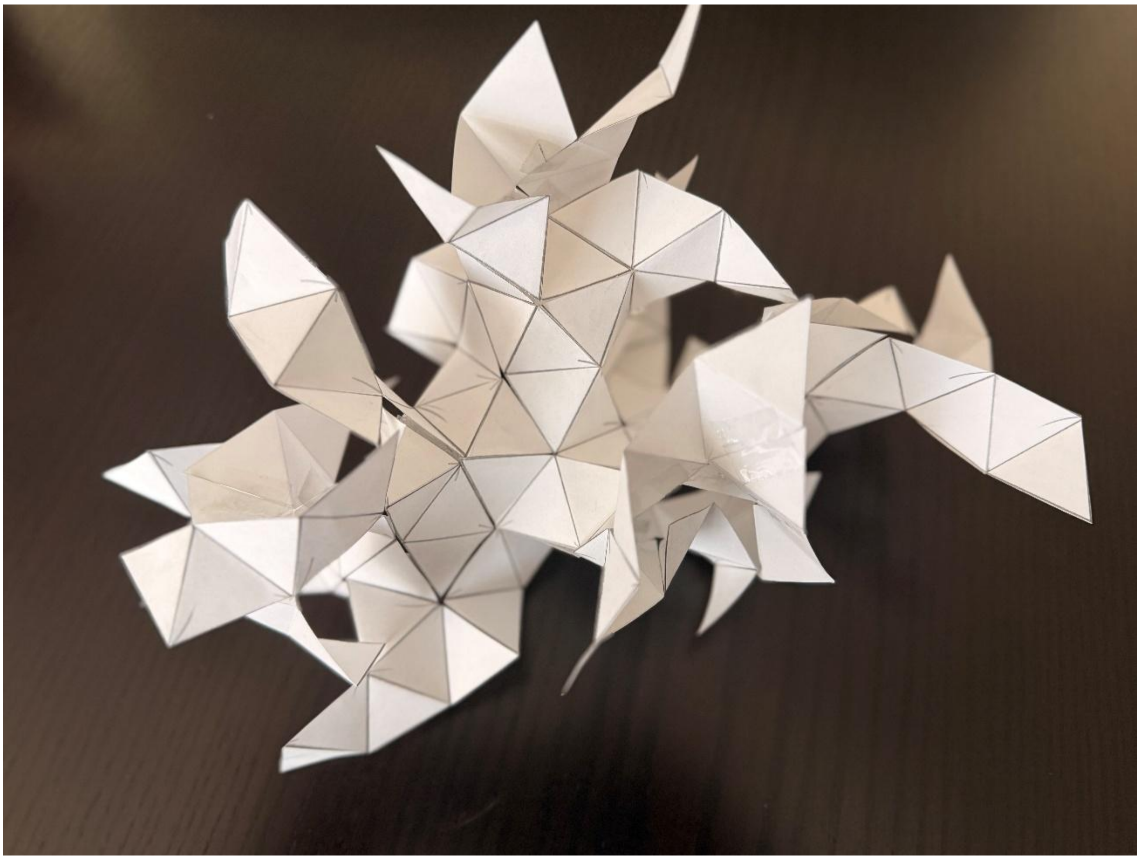
こうであり、もしこれらもレポートに載せるなら新しい言葉を考え出したような気がするため、やはり今回の話はレポート提出後に考えた話であったようにも思えます。いっぽうで、どうも今回の話もレポートに載せたような記憶もあるため、そのレポートが出てこない限りはそのあたり（この話はレポート以前か以後か）は確かでありません。

さて、この高校生だったときから三十数年がたち、私の教室のある高校生が今、一緒に４次元のことを考えておられます。その高校生は、正多体塊の図を、第２２章の最初のアイデアに基づき、アプリで６つの正多体塊の図をかかれました（第２２章に載せました）。そして、正多体塊が全部で何種類かという問いを考えるにあたり、正多面体がなぜ５種類かを考え、自身で「バカボンの理屈」に到達されました。そして、この理屈を高次元化し、辺にいくつ正多面体を集めて、面角の合計が、360°を超えないか、と考え始まりました。これは私の考えよりずっと筋がいいと言えるかもしれません。私は、「頂点に正多面体はいくつ集まるか」と考えたわけですが、「辺に正多面体はいくつ集まるか」と考えた記憶はないからです。余弦定理を用いて、正多面体の隣り合う面の面角のコサインを計算して、その角度があわせて360°を超えない正多面体を考えると以下のようになります。正四面体は、３つ、４つ、５つまでであり（それぞれ、正五体塊、正十六体塊、正六百体塊）、立方体は３つまでであり（正八体塊）、正八面体も３つまでであり（正二十四体塊）、正十二面体も３つまでです（正百二十体

塊)。私もこの計算をこのたびやってみましたが、初めてやる計算だと思います。もっとも以下のことはあります。学部 4 年（1998 年）のときに輪読で読んだ、W.Thurston の Three-Dimensional Geometry and Topology （その前の年である 1997 年刊行ですが、ずっと前からある Thurston の講義録の書籍化で、当時は 3 次元ポアンカレ予想の肯定的解決の前です）に、３次元多様体の例として、ポアンカレ十二面体空間（Poincaré dodecahedral space）が載っていて、これは、正十二面体の、向かい合う正五角形を、時計まわりに$\frac{1}{10}$だけ回転させて貼り合わせて得られる 3 次元多様体ですが、これは 1 つの辺に正十二面体が 3 つずつ集まります。そして、ユークリッド幾何的な正十二面体の面角は$116.565°$だそうなので、ポアンカレ十二面体空間は楕円幾何を持つ、というふうに書いてあったりするわけです。当時は、この計算（ユークリッド的な正十二面体の面角の計算）は初等数学であって読み飛ばしたと思いますが、これはこのたび（2025 年)、初めてやってみたと思います。

少しだけ当時を振り返ります。高校生のころ考えたこれらの本日の記事の内容は、球面幾何（楕円幾何）の最初のほうの話であるととらえられると思います。あくまで素朴に高校生的に、１次元と言えばユークリッド的にまっすぐ、２次元といえばユークリッド的にまったいら、と考えていた私の当時の限界が、こうして記事にまとめるために思い出して整理してみると、だんだん明らかになります。双曲幾何というような発想は高校生であったころ、まったくなかったわけで、双曲幾何を学んだとき「その

発想はなかった」と非常に驚き、また納得したわけです。前掲の Thurston の本で著者の Thurston は、最初のほうで、一定の負の曲率の曲面の近似モデルを、紙で作った正三角形を各頂点に 7 つずつ貼り合わせて作れと書いています（Exercise2.1.4(a)）。これは、この記事の最初のほうに書いたバカボンの理屈の※印のところにありますが、正三角形を 1 つの頂点に 7 つずつ集めることで、負の曲率の曲面の近似モデルが得られるわけです。（この Thurston の Exercise は、もちろん本当に紙で作ってみよと言っているわけですが、この輪読のときは、私でないある学生がここを読む当番に当たり、なんと彼はこの工作をやって来なかったのでした！私は見てみたかったので不満でした。ご指導くださっていた先生も不満そうでしたが、先生も実物を見てみたかったのでしょう。このときはこれで通過していますが、ここで、この記事を書くにあたり、28 年ごしにこの工作をやってみることにしました。その写真をここにアップします。）



当時から３次元多様体の幾何は８種類であると言われていました。それは Thurston の予想なのでした（幾何化予想）。これは本当であるとペレルマンによって証明されて、ポアンカレ予想は証明されたのでした。日記によると 2003 年 8 月 12 日に、先日出たポアンカレ予想の証明は本当らしいという仲間のうわさを聞き、2004 年 1 月 23 日の東大数理のセミナーで、その論文をお読みになった先生のお話をうかがいました。

第２８章　向き

大学に入ってから、ここまで書いて来たようなクリエイティヴなエピソードはほとん

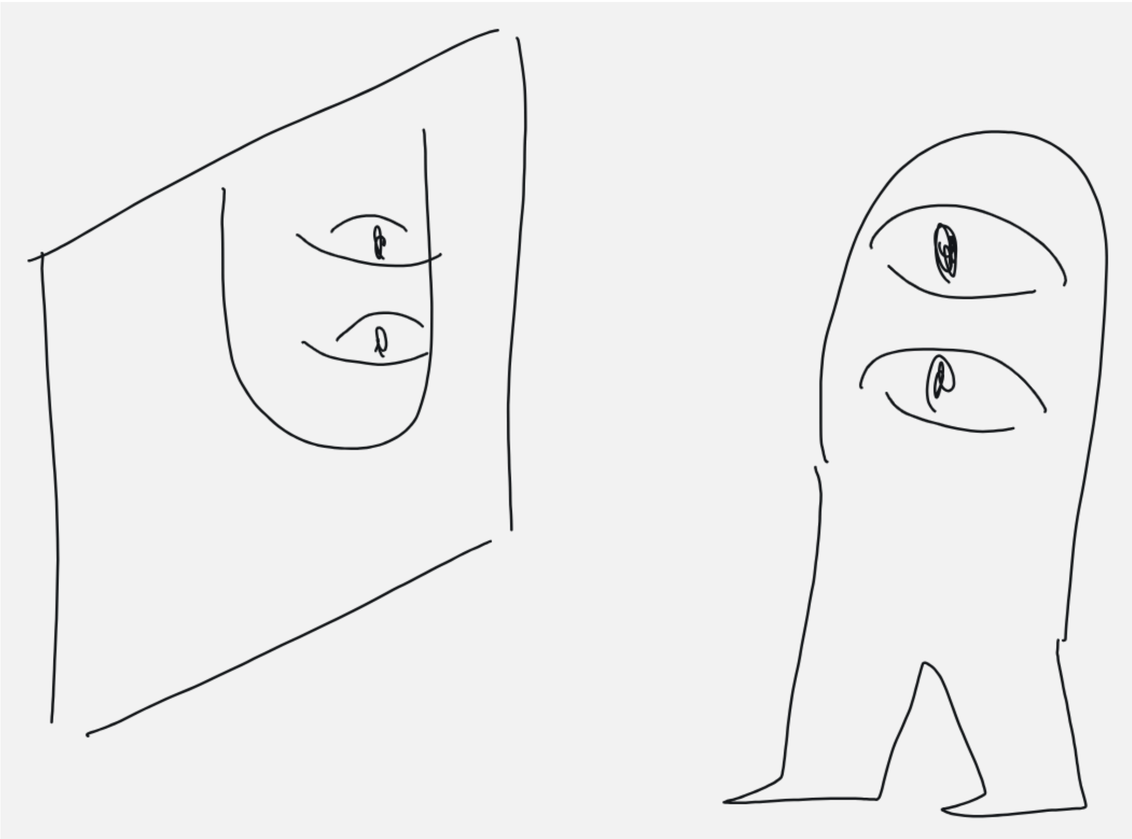
どなくなります。急にいろいろなことをものすごいスピードでたくさん習うようになったからです。いま当時を思い出してみますと、とても自分で新しいことをときどき思いつきながらゆっくり学ぶというようなペースではなくなったのでした。確かに、多様体にしても、ホモロジーにしても、微分形式にしても、双曲幾何にしても、「最初に考えた人は、よく思いついたな」という、ものすごい発想ばかり学びました。クリエイティヴなエピソードは、残りはもう修士論文だけです。その前に、この「自伝風の読み物」に記す唯一の学部時代の小さな思い出として、向き（orientation）の話を書きます。

向きというものを習ったとき、漠然と、３次元で向きは２つあるのだから、４次元では向きは４つあるのだろう、と思いました。しかし、よく考えてみると、４次元でも向きは２つなのでした。１次元で向きは２つ（正と負）、２次元でも向きは２つ（オモテとウラ）なのですから、何次元でも向きは２つでした。自分を恥じました。

しかし、向きというものを学んでみると、自分が向きというものを考えたのはこれが初めてではないことに気づかされます。以下の話はまた高校以前のものになりますが、いつの時代のものか、はっきりしません。「鏡に映ったものはなぜ左右が逆になるのか」という問いです。

この問いは、小さいころ、本で読みました。鏡で写したものが、上下逆ではなく左右

逆になることの理由について、その本は「人間の目が横に並んでいるから」と書いていました。どうもおかしいです。その本の挿絵には、縦に２つの目がついた化け物がいて、それを鏡に写して、上下が逆になった絵が描いてありました（おおよそ以下の絵)。いかにもおかしな絵です。これを描いた挿絵画家もおかしいと思いながら描いたのではないか。

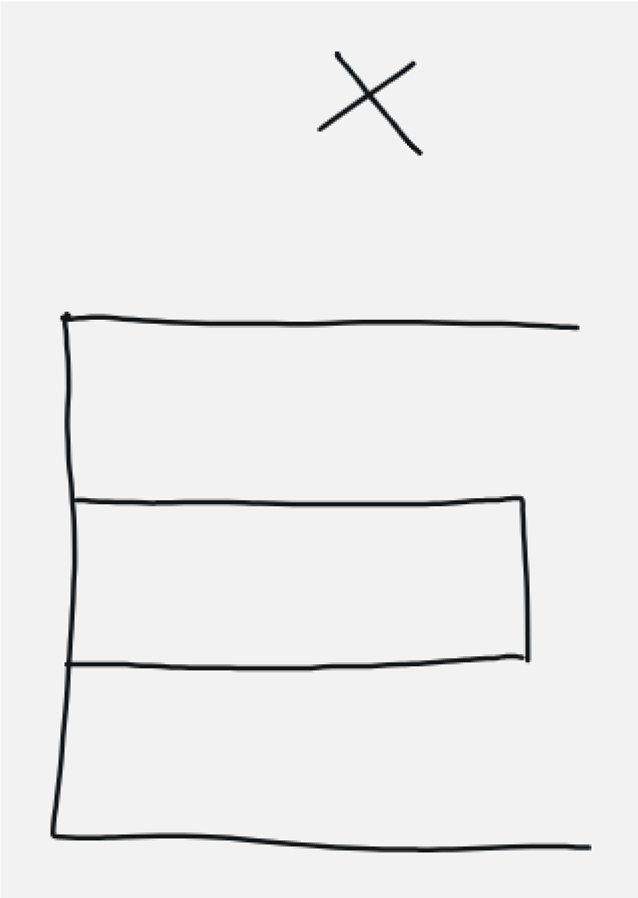


この問いにきちんと答えるのには何年もかかりました。どれくらい考えたのか、あるとき以下の結論に達しました。これは人に言って納得してもらえたことがありません（向きを知っている大学時代および大学院時代の人には当然通じたでしょうが言ってみていません)。人間を鏡に写して、左右が逆になったように見えるのは、人間が左右

対称（あるいは、「左右交換可能」）だからです。

ここで「左右交換可能」とは、右と左を入れ替えても再びそれが人間と認識できるという意味で言っています。

私という人間を鏡に写します。鏡に写った像をまた人間であると認識しようとします。すると、それは人間だと見なすことが出来、その像は、左右が逆になっているのです。頭が下にあり、上に向かって２本の足の伸びた人間はいません。また、背面に顔があり、前面に背中のある人間もいません。ただ、人間は、左右を入れ替えてもまた人間であると認識できるのです。以下のような例を挙げます。上下対称だが左右対称でないもの、「巨」という漢字を考えます。以下の図のように、「巨」の字の上にバツ印をつけておきます。これを鏡に写します。写った像を再び「巨」という字であると認識することにします。するとその像は「巨」であると認識でき、上下が逆になっています（さっきのバツ印は「巨」の字の下にあるはずです）。



次に、上下対称でも左右対称でもない字、ひらがなの「あ」を考えます。これを鏡に写し、その像を再び「あ」と認識できるかというと、できないはずです。

上下対称でないが左右対称である文字「A」を鏡に写せば、左右が逆になります。世の中にあるものは人間に限らず、草花でも犬でも猫でも、家や車のような人工物でも、大概は左右対称（左右交換可能）であるため、鏡に写ると左右が逆に見えるのでした。

ここまでは子供のころの理屈です。（この文章に書いた他の話の多くもそうですが、なかなか人に言って通じる話ではないわけです。）以下に、大学４年のときの話を書きま

す。1998 年のことです。以前、第２２章に書きましたが、当時、東大の数学科では、院試を迎える学部 4 年生に向けて、「概説」という、先生が 1 回につきお二人現れて 45 分ずつご自身の専門の説明をされるという授業が必修であったのでした。15 週とするなら 30 人の先生が登場なさったことになります。その中で、３次元多様体のお話をされた先生がおられました。宇宙を３次元多様体と見て、天文物理学の先生と共同研究をなさっているお話が出ました。宇宙の曲率を測るため、地球から（太陽系から？）見て等距離にある星の個数を数えておられるのでした。「今のところ宇宙の曲率は限りなく 0 に近い」とおっしゃっておられました。これは三十年近く前の話ですから、現在の研究がどうなっているのか私にはわかりません。

この「概説」という授業では、30 人の先生のうち 2 人の先生にレポートを書かねばなりませんでした。私はそのうちのお一人をこの先生にして、以下のような SF を書き、レポートとしました。宇宙が向き付け可能でない 3 次元多様体であったとしたらどうなるか、というお話です。おおまかなあらすじしか覚えていませんが、だいたい以下のような話です。

ある宇宙飛行士がロケットで宇宙に行き、帰って来ました。その宇宙飛行士から見て、地球は以下のように見えます。日本列島の東に日本海があり、東京の東に大阪があります。日本に着くと、車は右側通行となっており、あらゆる看板の文字は裏返っています。逆に、ずっと地球にいた人からは以下のように見えます。宇宙から帰って来

たロケットのボディーの文字は裏返っており、ロケットから降りて来た宇宙飛行士は、もともと右ほおにあったほくろがなくなっていて、代わりに左ほおにほくろがあります。右利きだった宇宙飛行士は左利きとなっていて、左手で裏返った文字を書きます。レントゲンを撮ってみたら、心臓が右にありました。

落ちは以下のようにしました。タンパク質には向きのあるものがあると聞きます。この宇宙飛行士は、向きのあるタンパク質が摂取できなくて栄養失調で死ぬのです。

現時点で考えてみますと、このレポートは、宇宙と３次元多様体について真剣に研究しておられる先生に、大変失礼であったのではないかと恐れますが、先生は単位をくださいました。

（本日の「向き」の話はここまでです。「自伝風の読み物」というシリーズは、このあと書いた修士論文に触れて、終わりとなります。）

以上 2026 年 4 月 21 日